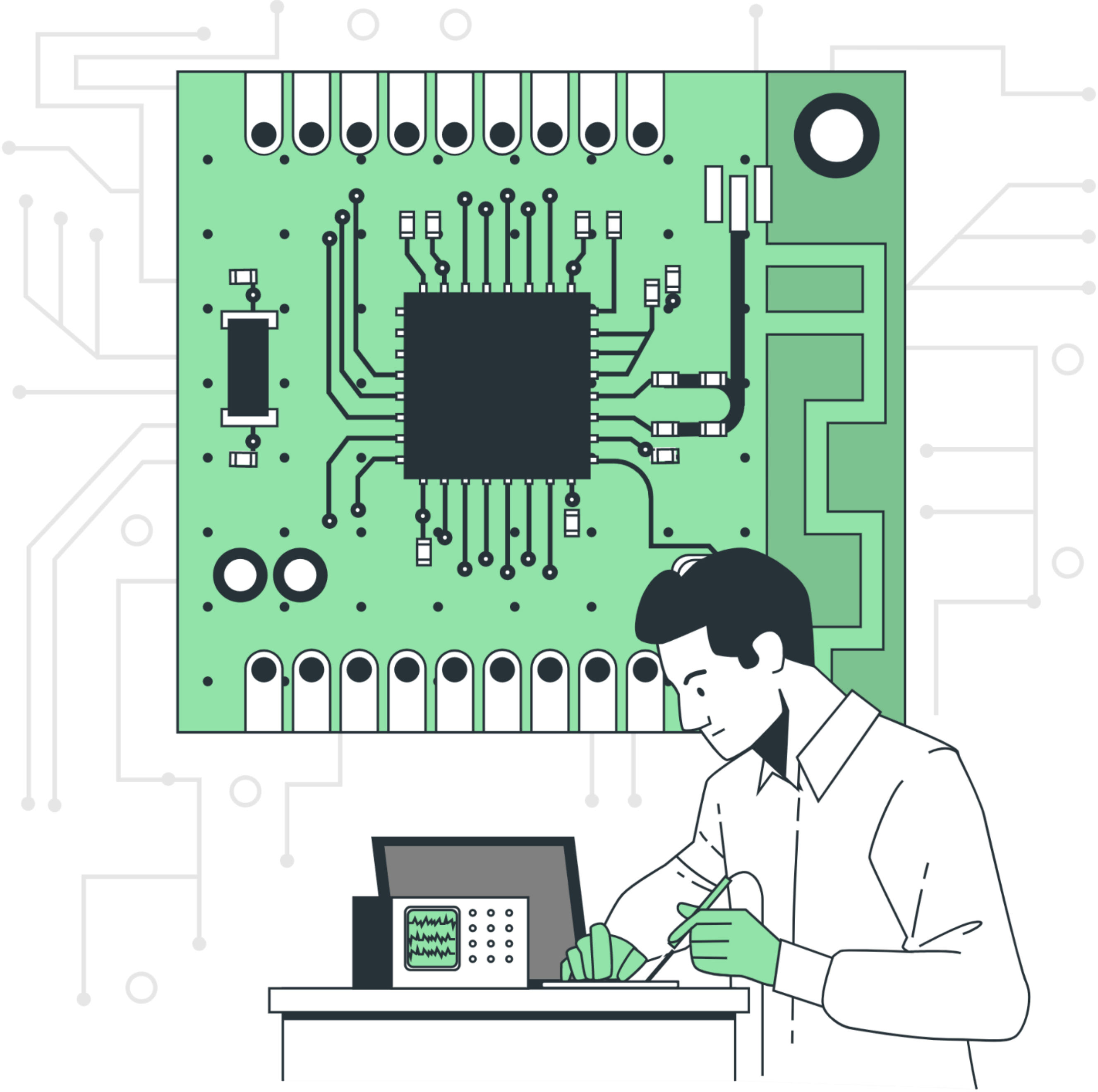
VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



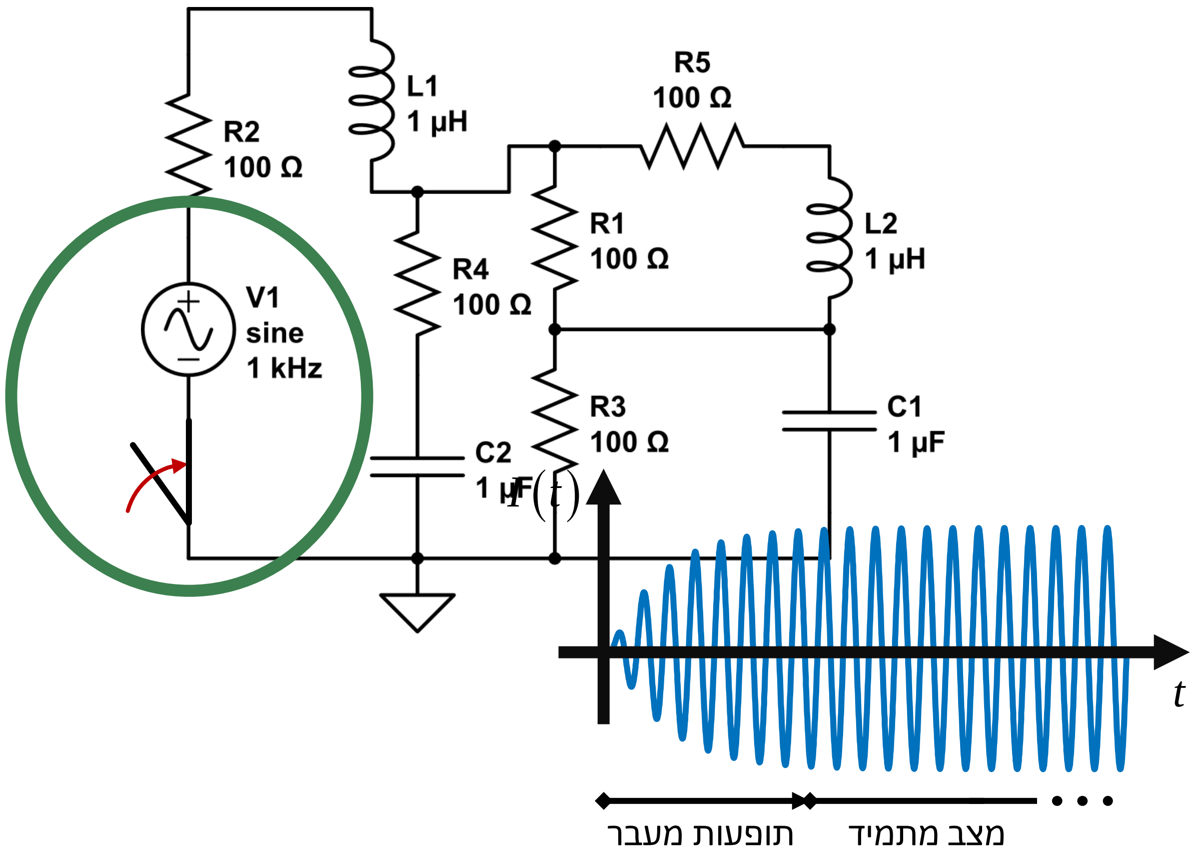
מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

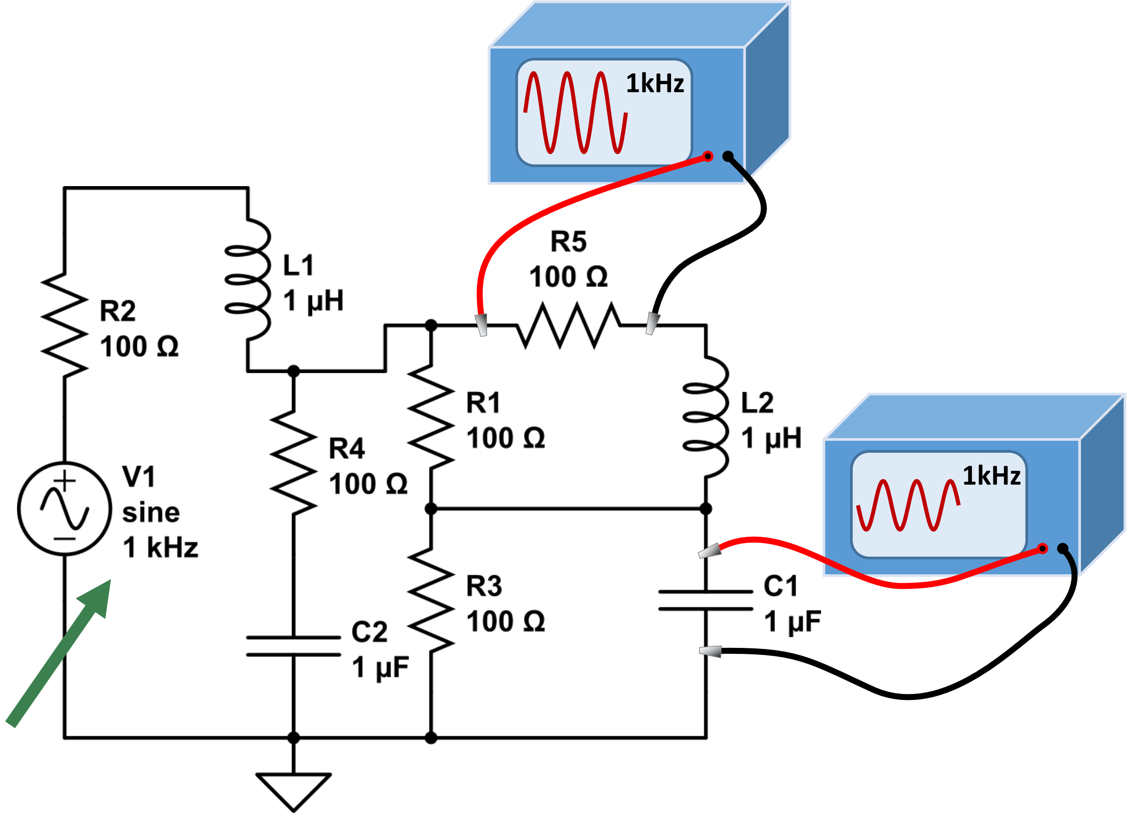
יחידה 6 : היענות לתדר ועקומות בודה

מקטע 6.1 : תגובת מערכת LTI לאות סינוסואידלי

ביחידה 2 דיברנו על תופעות מעבר ומצב מתמיד (AC)



"חוק שימור התדר" (למערכת LTI)



אז מה לא "נשמר" ?

$$x(t) = A_{in}\sin(\omega t + \phi_{in}) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = A_{out}\sin(\omega t + \phi_{out})$$

תשובה: האמפליטודה והפאזה

איך משתנות האמפליטודה והפאזה?

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{H(s)X(s)}}_{\text{ZSR: תופעות מעבר + מצב מתמיד}} + \underbrace{\frac{P_i(s)}{D(s)}}_{\text{ZIR}}$$

איך משתנות האמפליטודה והפאזה?

$$x(t) = A_{in}\sin\left(\omega t + \phi_{in}\right) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = A_{out}\sin\left(\omega t + \phi_{out}\right)$$

תגובת התדר: $\boxed{H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\phi(j\omega)}}$

$$A_{out} = \left|H(j\omega)\right| A_{in}$$

$$\phi_{out} = \phi_{in} + \angle\left[H(j\omega)\right]$$

הגבר/ניחות

הגבר המערכת:

$$\frac{A_{out}}{A_{in}} = \left|H\left(j\omega\right)\right|$$

הגבר ההספק של המערכת:

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \left|H\left(j\omega\right)\right|^{2}$$

הגבר המערכת ב-dB:

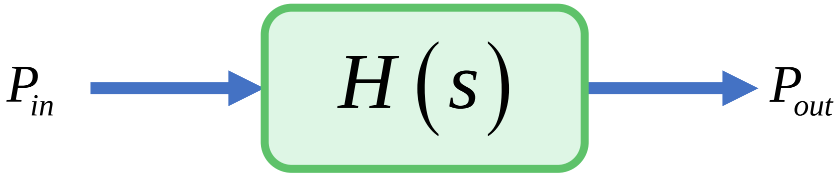
$$20\log_{10}\left|H\left(j\omega\right)\right|$$

$$\parallel$$

הגבר ההספק ב-dB :

$$10\log_{10}\left|H\left(j\omega\right)\right|^{2}$$

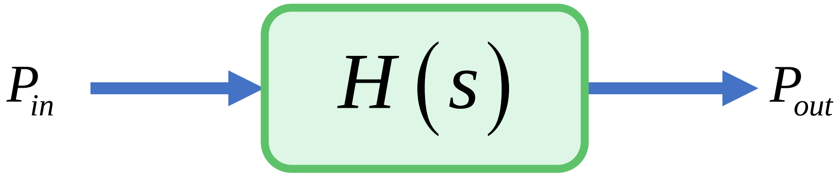
דציבל - dB



$$\text{Gain/Loss} = 10\log_{10}\frac{P_{out}}{P_{in}}$$

1. מאפשר הצגה בו-זמנית של ערכים גדולים מאוד וקטנים מאוד
2. בשירשור מערכות ההגבר/הפסד הכולל (ב-dB) הוא סכום של כל ההגברים (ב-dB)

דציבל - dB

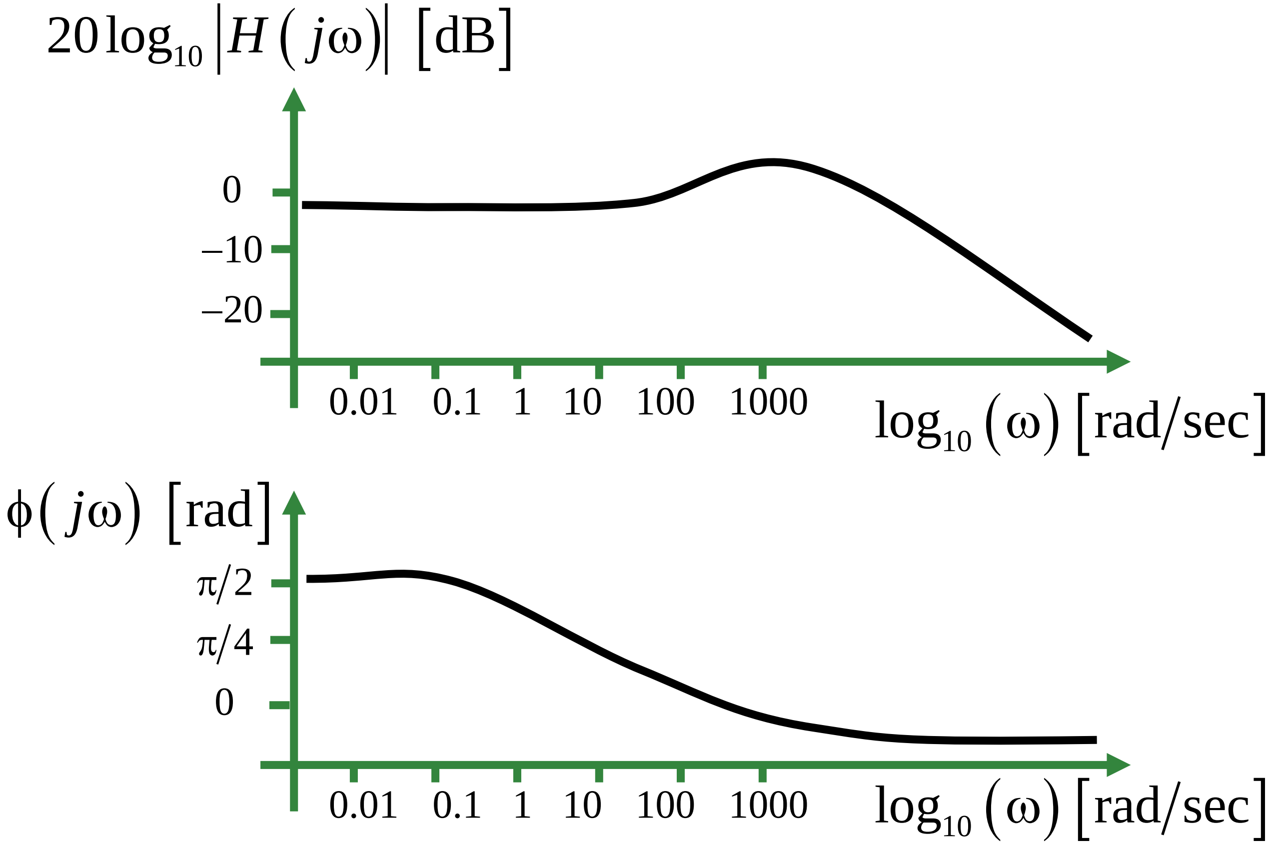


$$\text{Gain/Loss} = 10\log_{10}\frac{P_{out}}{P_{in}}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{G} &= 0.001 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = -30\,\mathrm{dB} \\
\mathrm{G} &= 0.01 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = -20\,\mathrm{dB} \\
\mathrm{G} &= 0.1 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = -10\,\mathrm{dB} \\
\mathrm{G} &= 1 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = 0\,\mathrm{dB} \\
\mathrm{G} &= 10 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = 10\,\mathrm{dB} \\
\mathrm{G} &= 100 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = 20\,\mathrm{dB} \\
G &= 1000 && \Rightarrow && G_{\mathrm{dB}} = 30\,\mathrm{dB}
\end{aligned}
$$

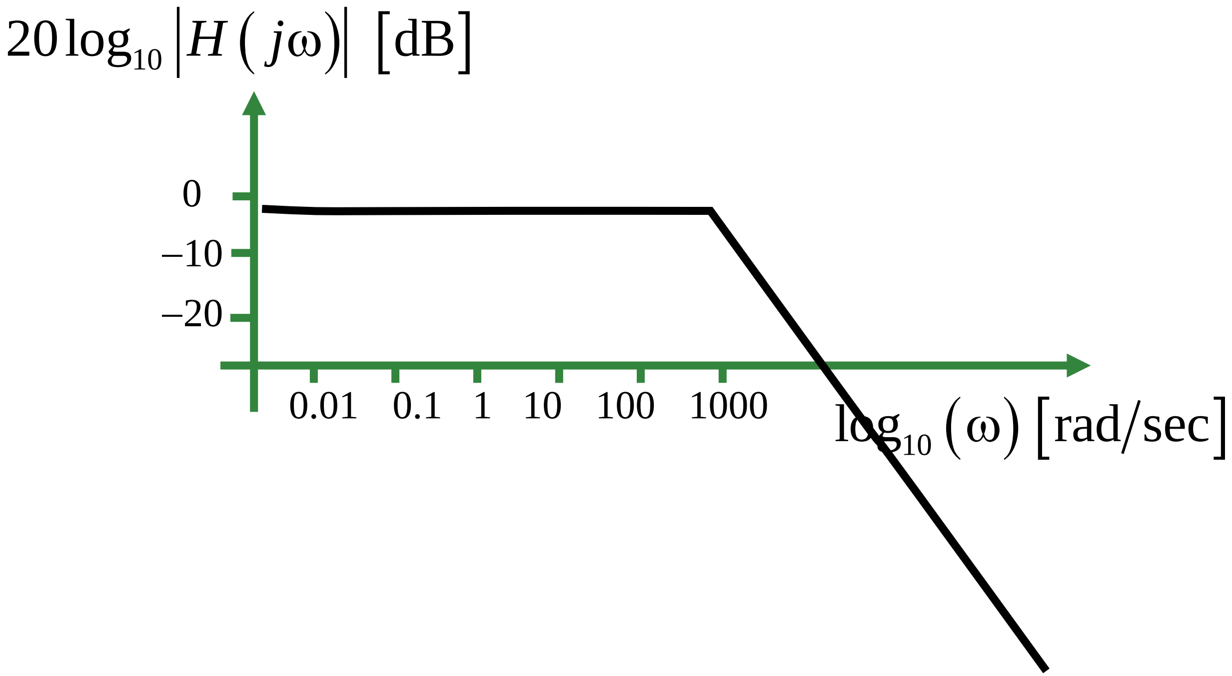
תגובת התדר

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\phi(j\omega)}$$



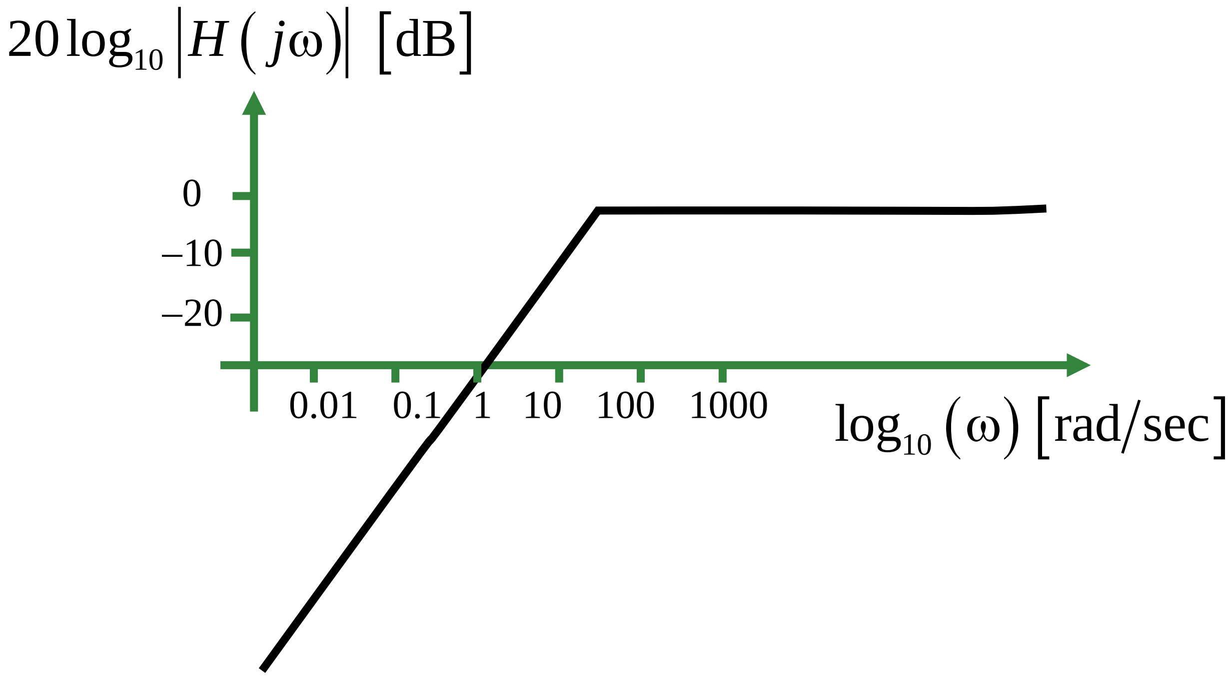
מסננים:

מסנן מעביר נמוכים: Low Pass Filter (LPF)



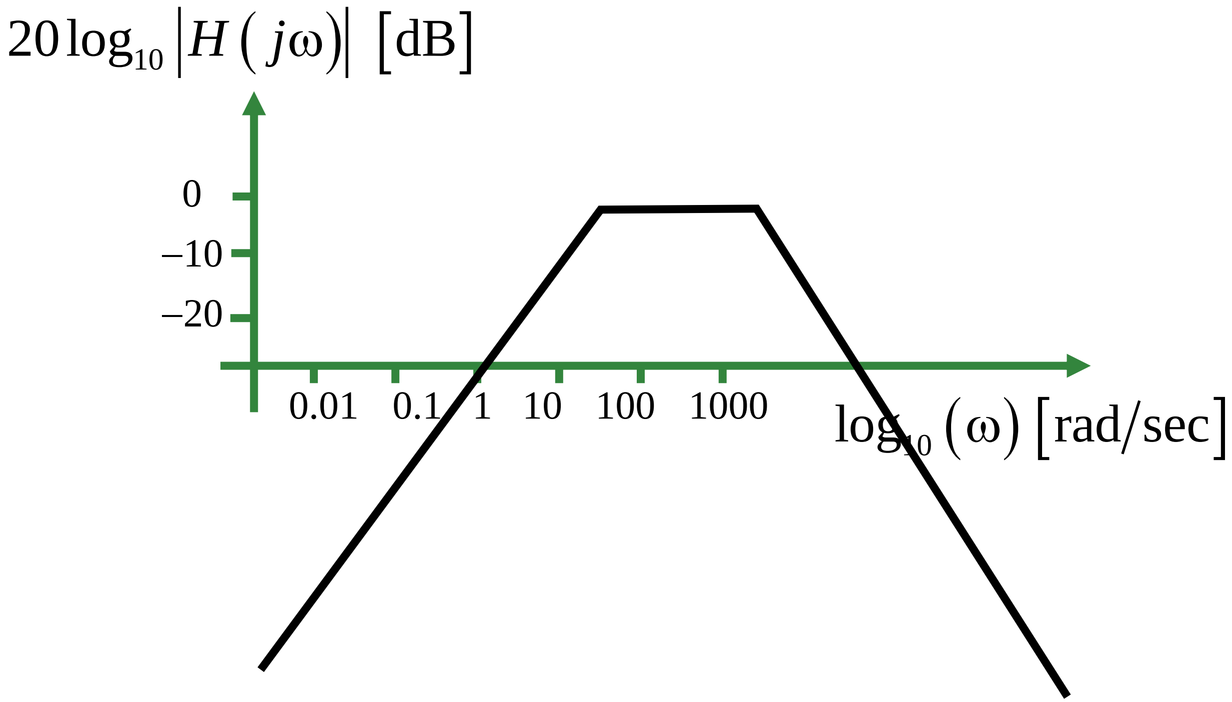
מסננים:

מסנן מעביר גבוהים: High Pass Filter (HPF)



מסננים:

מסנן מעביר פס: Bend Pass Filter (BPF)



עבור אות סינוסואידלי בכניסה:

$$x(t)=A\sin(\omega t) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow Y(s)$$

$$\downarrow$$

$$X(s)=A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s)=AH(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

עבור אות סינוסואידלי בכניסה:

$$Y(s) = AH(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s) = AH(s)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \underbrace{T(s)}_{\text{תופעות מעבר}} + \underbrace{\frac{B_1}{s+j\omega} + \frac{B_2}{s-j\omega}}_{\text{מצב מתמיד}}$$

$$B_1 = (s+j\omega)Y(s)\Big|_{s=-j\omega} = \frac{AH(-j\omega)}{-2j}$$

$$B_2 = (s-j\omega)Y(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{AH(j\omega)}{2j}$$

עבור אות סינוסואידלי בכניסה:

$$Y_{steady\ state}(s) = \frac{A}{-2j}\left[\frac{H(-j\omega)}{s+j\omega} - \frac{H(j\omega)}{s-j\omega}\right]$$

$$Y_{steady\ state}(s) = \frac{A\left|H(j\omega)\right|}{-2j}\left[\frac{e^{-j\phi(j\omega)}}{s+j\omega} - \frac{e^{j\phi(j\omega)}}{s-j\omega}\right]$$

$$= \frac{A\left|H(j\omega)\right|}{-2j} \cdot \frac{(s-j\omega)e^{-j\phi} - (s+j\omega)e^{j\phi}}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{A\left|H(j\omega)\right|}{-1} \cdot \frac{-s\sin(\phi) - \omega\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$$

עבור אות סינוסואידלי בכניסה:

$$Y_{steady\ state}(s) = A\left|H(j\omega)\right| \frac{s\sin(\phi)+\omega\cos(\phi)}{s^2+\omega^2}$$

$$\boxed{y_{steady\ state}(t) = A\left|H(j\omega)\right|\sin\left[\omega t+\phi(j\omega)\right]}$$

ה"הגבר"

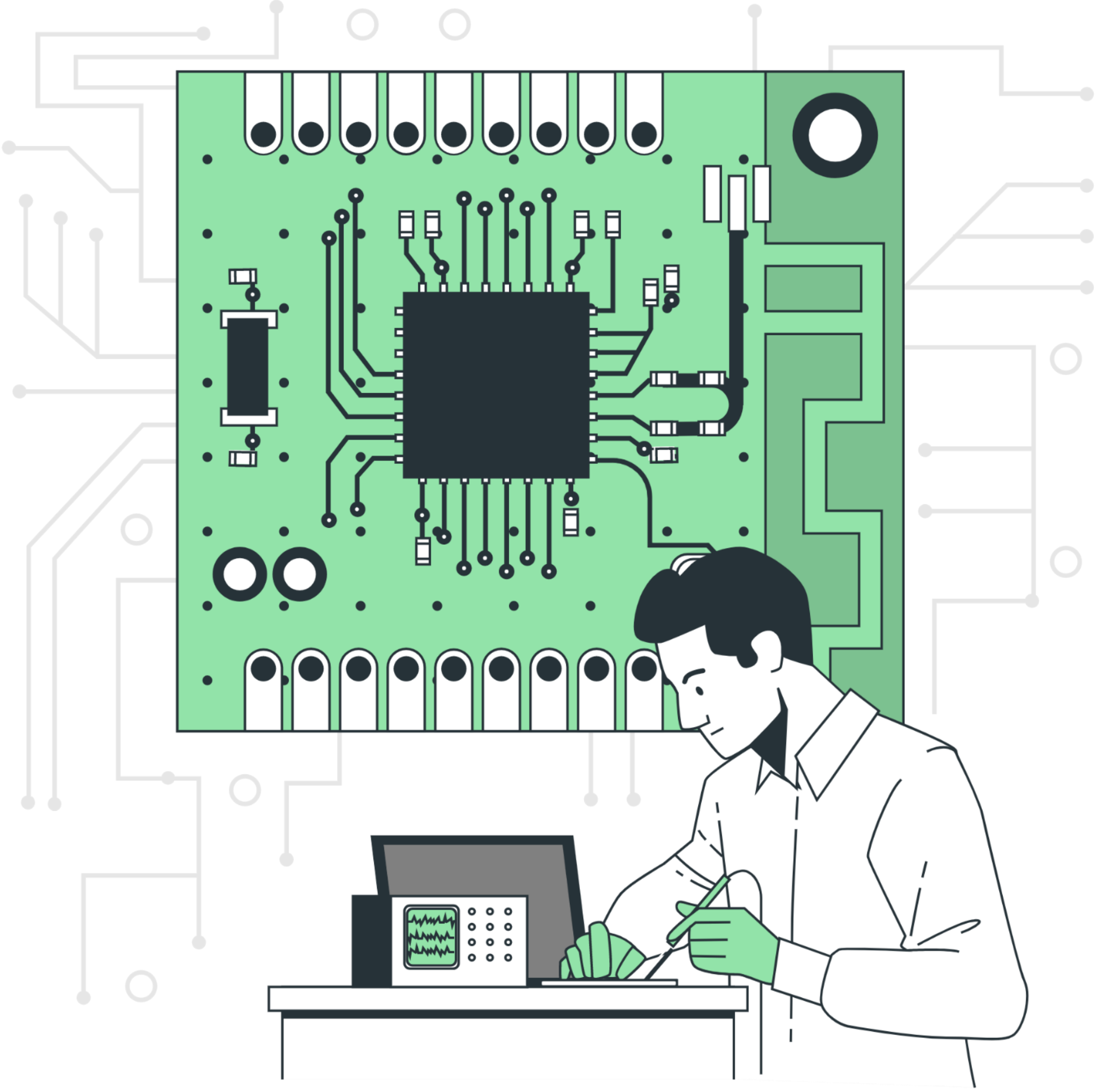
ה"פאזה"

עקומות בודה

בהינתן מערכת LTI נצייר את עקומות הבודה שמאפיינות אותה לפי המתכון הבא:

1. נמצא את פונקציית התמסורת של המערכת $H(s)$
2. נציב $s = j\omega$ ונקבל את $H(j\omega)$
3. נחשב את $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|$ ונצייר אותו כנגד $\log_{10}\omega$
4. נחשב את $\angle H(j\omega)$ ונצייר אותה כנגד $\log_{10}\omega$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

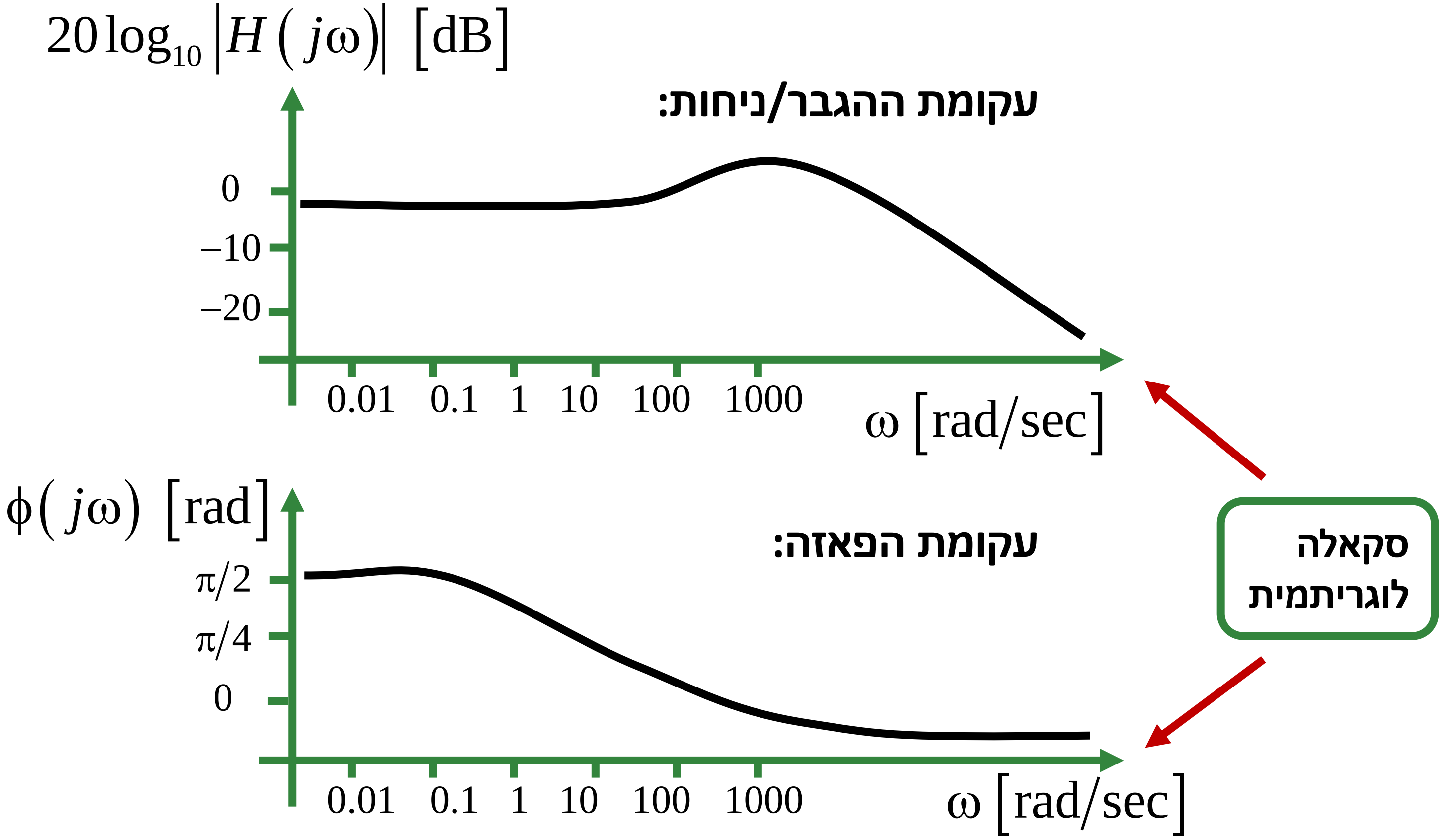
פרופ' אבישי אייל

יחידה 6 : היענות לתדר ועקומות בודה

מקטע 6.2 : ציור עקומות בודה – חלק ראשון

תגובת התדר

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\phi(j\omega)}$$



תגובת התדר

זוג אפסים מרוכבים
אפס ב-z_2 עם ריבוי n
אפס פשוט ב-z_1
אפס בראשית עם ריבוי m
אפס בראשית

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=G_0\frac{s\cdot s^m (s+z_1)(s+z_2)^n\left(s^2+2\xi_0\omega_0 s+\omega_0^2\right)}{s\cdot s^u (s+p_1)(s+p_2)^v\left(s^2+2\xi_1\omega_1 s+\omega_1^2\right)}$$

זוג קטבים מרוכבים
קוטב ב-p_2 עם ריבוי v
קוטב פשוט ב-p_1
קוטב בראשית עם ריבוי u
קוטב בראשית

עקומת ההגבר

$$H(s)=\boxed{G_0}\frac{\boxed{s}\cdot\boxed{s^m}\boxed{(s+z_1)}\boxed{(s+z_2)^n}\left(s^2+2\xi_0\omega_0 s+\omega_0^2\right)}{s\cdot s^u(s+p_1)(s+p_2)^v\left(s^2+2\xi_1\omega_1 s+\omega_1^2\right)}$$

$$20\log_{10}\left[\left|H(j\omega)\right|\right]=\boxed{20\log_{10}(G_0)}+$$

$$+\boxed{20\log_{10}(\omega)}+$$

$$+\boxed{m20\log_{10}(\omega)}+\boxed{20\log_{10}\left(\left|j\omega+z_1\right|\right)}+\boxed{n20\log_{10}\left(\left|j\omega+z_2\right|\right)}+$$

$$+20\log_{10}\left(\left|\omega_0^2-\omega^2+j2\xi_0\omega_0\omega\right|\right)+$$

$$-20\log_{10}(\omega)+$$

$$-u20\log_{10}(\omega)-20\log_{10}\left(\left|j\omega+p_1\right|\right)-v20\log_{10}\left(\left|j\omega+p_2\right|\right)+$$

$$-20\log_{10}\left(\left|\omega_1^2-\omega^2+j2\xi_1\omega_1\omega\right|\right)$$

עקומת הפאזה

$$H(s) = G_0 \frac{s \cdot s^m (s+z_1)(s+z_2)^n \left(s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2\right)}{s \cdot s^u (s+p_1)(s+p_2)^v \left(s^2 + 2\xi_1\omega_1 s + \omega_1^2\right)}$$

$$\begin{aligned}
&\angle H(j\omega) = \angle(G_0) + \\
&+\angle(j\omega) + m\angle(j\omega) + \angle(j\omega + z_1) \\
&+n\angle(j\omega + z_2) + \angle\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi_0\omega_0\omega\right) + \\
&-\angle(j\omega) - u\angle(j\omega) - \angle(j\omega + p_1) \\
&-v\angle(j\omega + p_2) - \angle\left(\omega_1^2 - \omega^2 + j2\xi_1\omega_1\omega\right)
\end{aligned}$$

עקומות בודה

בהינתן מערכת LTI נצייר את עקומות הבודה שמאפיינות אותה לפי המתכון הבא:

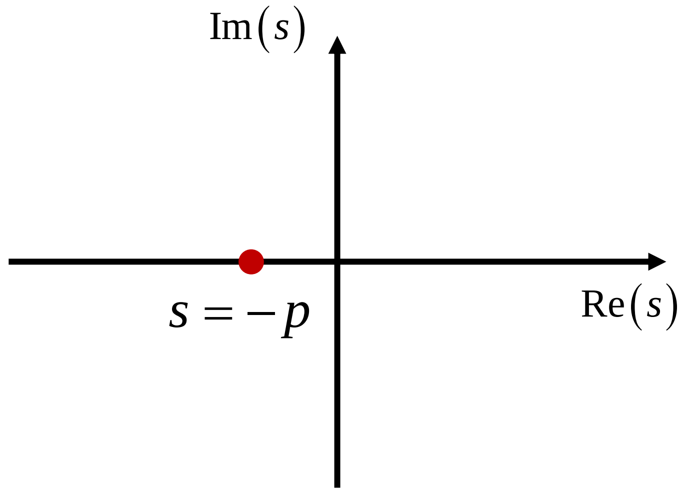
1. נמצא את פונקציית התמסורת של המערכת $H(s)$
2. נציב $s = j\omega$ ונקבל את $H(j\omega)$
3. נחשב את $20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|$ כסכום של גורמים בסיסיים ונצייר אותו כנגד ω בסקאלה לוגריתמית
4. נחשב את $\angle H(j\omega)$ כסכום של גורמים בסיסיים ונצייר אותה כנגד ω בסקאלה לוגריתמית

קוטב שמאלי פשוט

$$H(s)=\frac{1}{s+p}$$

$p>0$

מישור לפלס:



קוטב שמאלי פשוט

$$H(s) = \frac{1}{s+p} \qquad p > 0$$

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + p}$$

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{p}}$$

$$20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| = -20\log_{10}\left(p\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)$$

קוטב שמאלי פשוט

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left|H\left(j\omega\right)\right| = -20\log_{10}\left(p\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}\right)$$

$$= -20\log_{10} p - 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$$

גרפים אסימפטוטים:

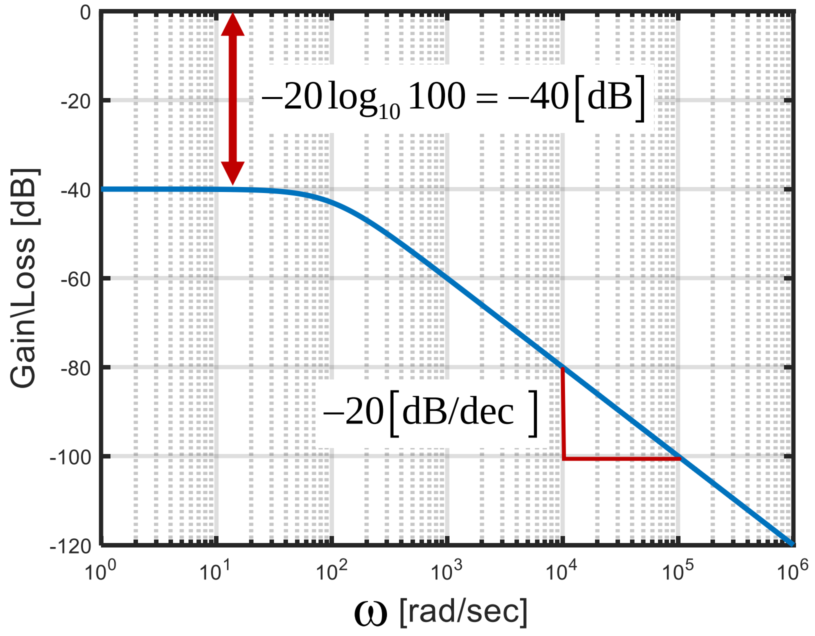
$$\approx \begin{cases} -20\log_{10} p & \omega \ll p \\ -20\log_{10}\omega & \omega \gg p \end{cases}$$

קוטב שמאלי פשוט

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right]=-20\log_{10}\, p-20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$$

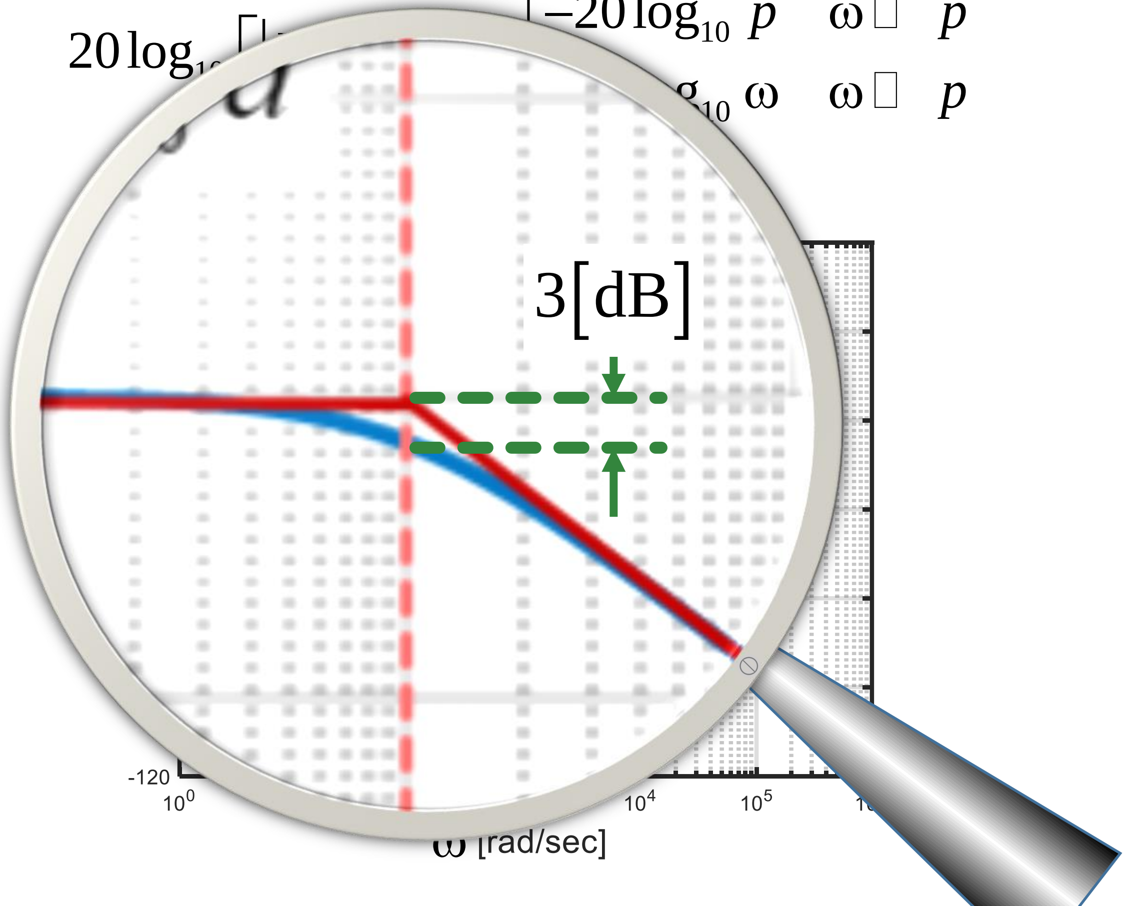
$$p=100$$



קירוב אסימפטוטי

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left[\ldots\right. \qquad \begin{cases} -20\log_{10} p & \omega \ll p \\ \ldots g_{10}\,\omega & \omega \gg p \end{cases}$$



ההגבר/ניחות ב- $\omega = p$

גרפים אסימפטוטים:

$$20\log_{10}\left|H\left(j\omega\right)\right| \approx \begin{cases} -20\log_{10} p & \omega \ll p \\ -20\log_{10} \omega & \omega \gg p \end{cases}$$

$\omega = p$

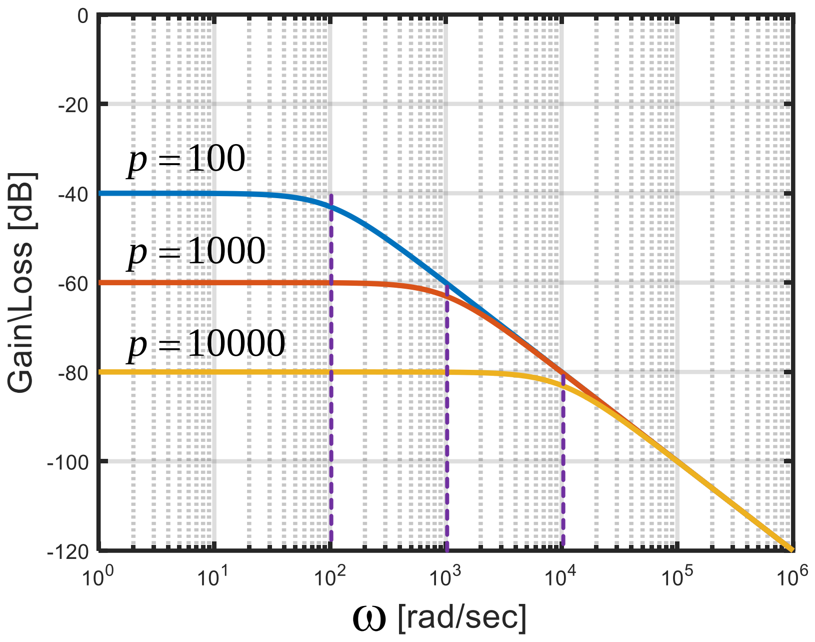
עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left|H\left(j\omega\right)\right| = 20\log_{10}\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}} =$$

$\omega = p$

$$= -20\log_{10} p - 3 \ \left[\mathrm{dB}\right]$$

קוטב שמאלי פשוט



קוטב שמאלי פשוט

עקומת הפאזה:

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{p}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

גרפים אסימפטוטים:

$$\approx \begin{cases} 0 & \omega \ll p \\ \dfrac{\pi}{4} & \omega = p \\ \dfrac{\pi}{2} & \omega \gg p \end{cases}$$

קוטב שמאלי פשוט

עקומת הפאזה:

$$H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{p}}$$

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

גרפים אסימפטוטים:

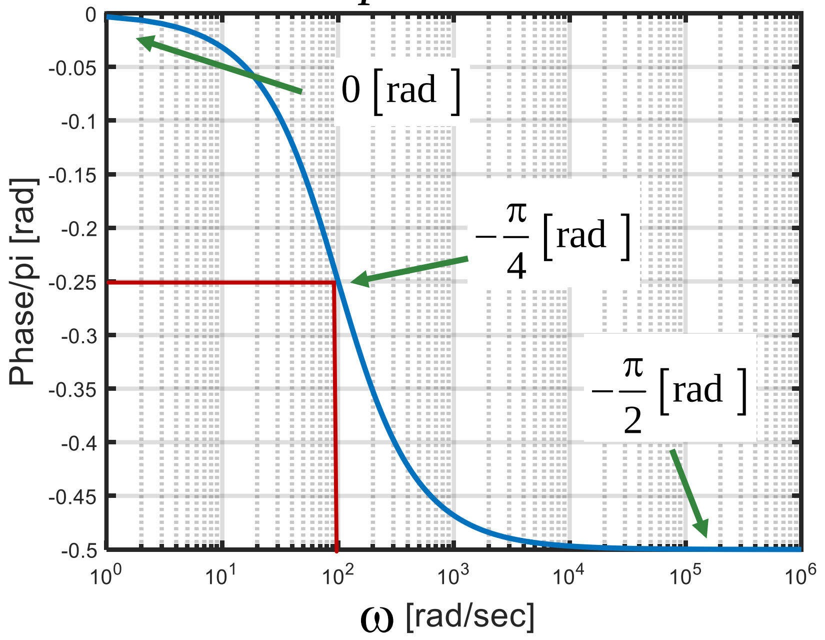
$$\approx \begin{cases} 0 & \omega \ll p \\ \text{straight line} & 0.2p < \omega < 5p \\ \dfrac{\pi}{2} & \omega \gg p \end{cases}$$

קוטב שמאלי פשוט

עקומת הפאזה:

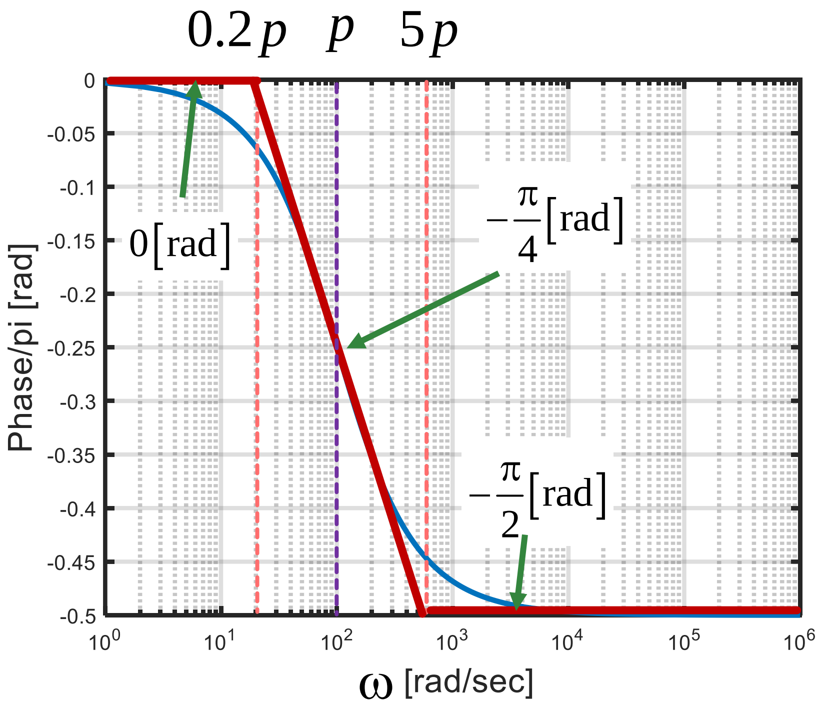
$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

$p = 100$

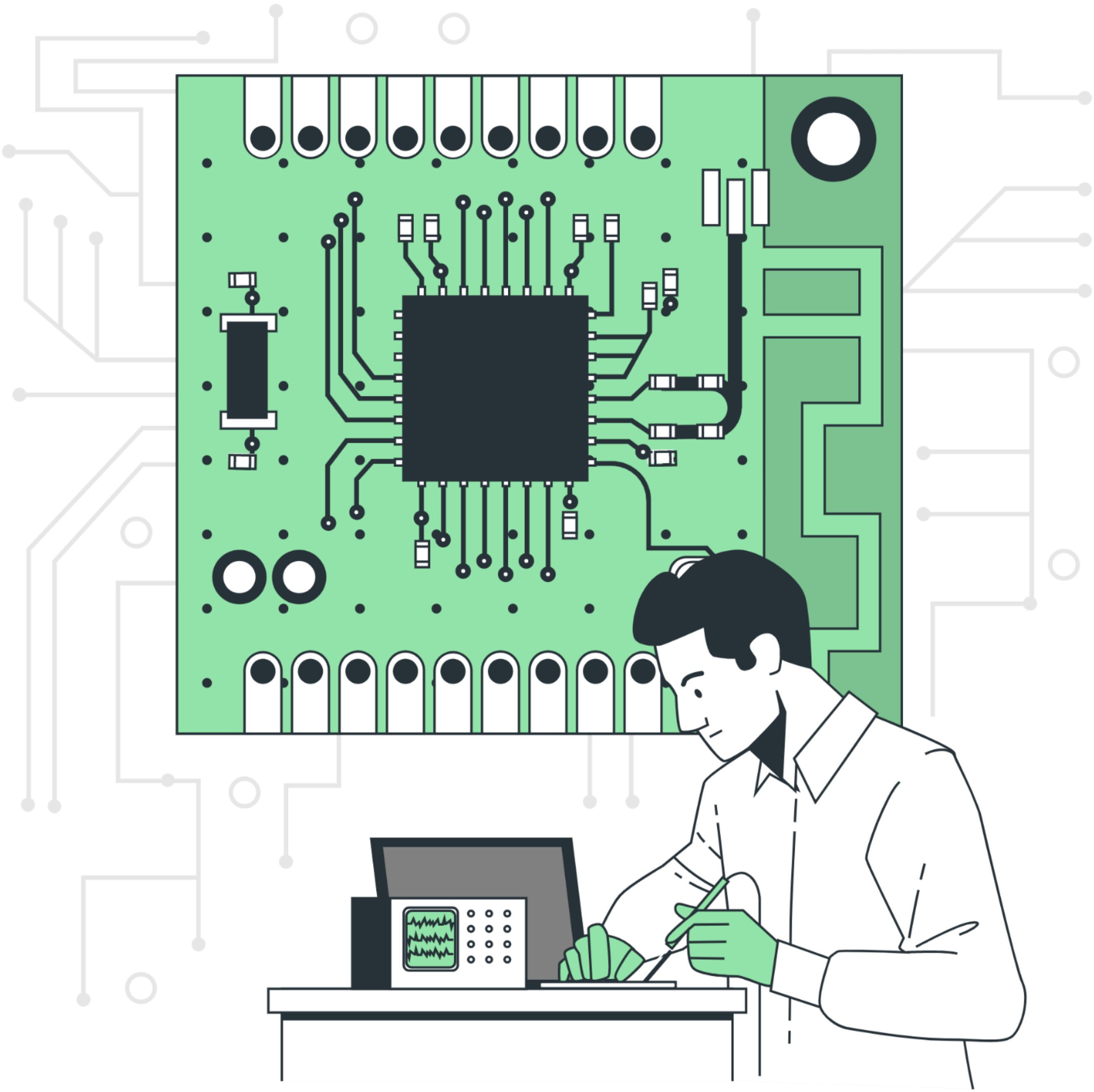


קוטב שמאלי פשוט

גרפים אסימפטוטים:



VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 6 : היענות לתדר ועקומות בודה

מקטע 6.3 : ציור עקומות בודה – חלק שני

תגובת התדר

זוג אפסים מרוכבים

אפס ב-z_2 עם ריבוי n

אפס פשוט ב-z_1

אפס בראשית עם ריבוי m

אפס בראשית

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=G_0\frac{s\cdot s^m\left(s+z_1\right)\left(s+z_2\right)^n\left(s^2+2\xi_0\omega_0 s+\omega_0^2\right)}{s\cdot s^u\left(s+p_1\right)\left(s+p_2\right)^v\left(s^2+2\xi_1\omega_1 s+\omega_1^2\right)}$$

זוג קטבים מרוכבים

קוטב ב-p_2 עם ריבוי v

קוטב פשוט ב-p_1

קוטב בראשית עם ריבוי u

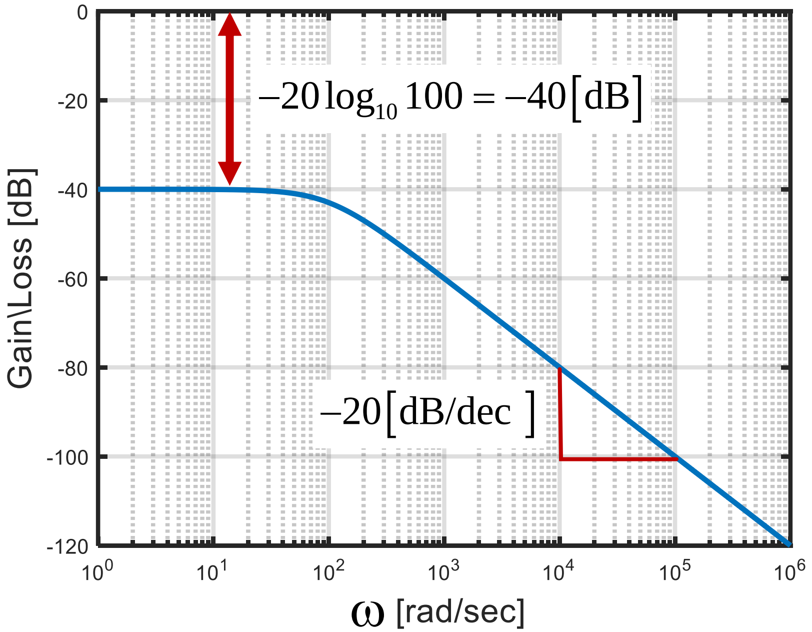
קוטב בראשית

קוטב שמאלי פשוט

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right]=-20\log_{10}\,p-20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p^2}}$$

$$p=100$$

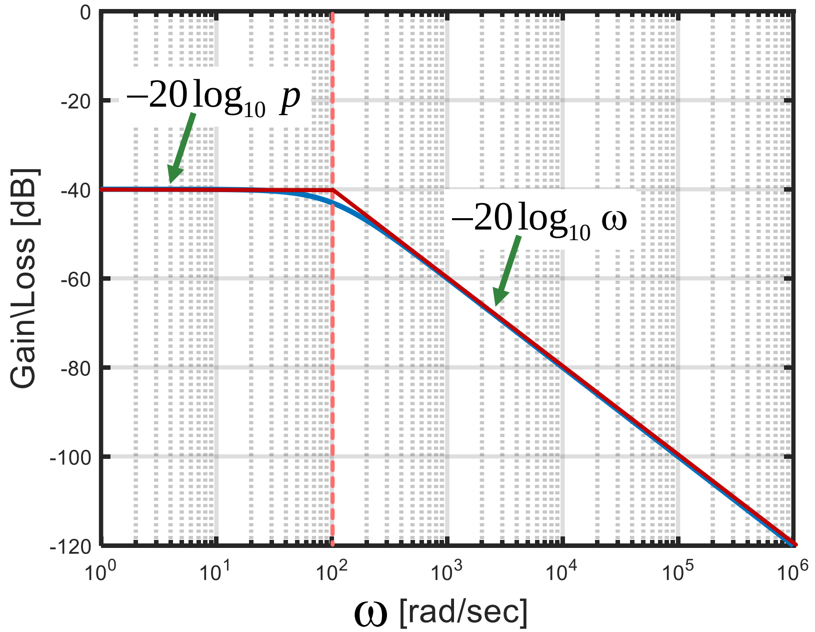


קירוב אסימפטוטי

עקומת ההגבר:

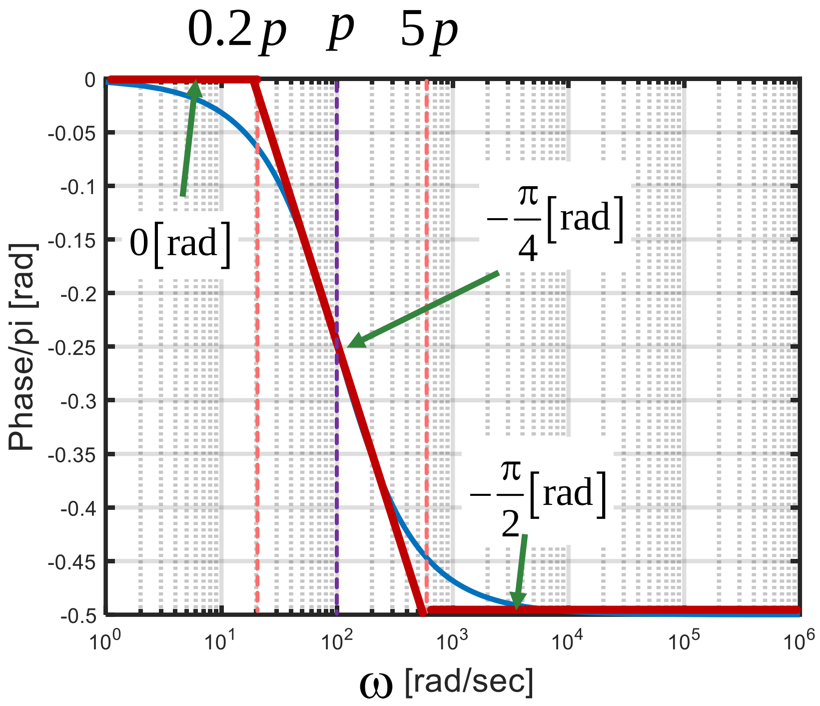
$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right]\approx\begin{cases}-20\log_{10}p & \omega\ll p\\ -20\log_{10}\omega & \omega\gg p\end{cases}$$

$p=100$



קוטב שמאלי פשוט

גרפים אסימפטוטים:

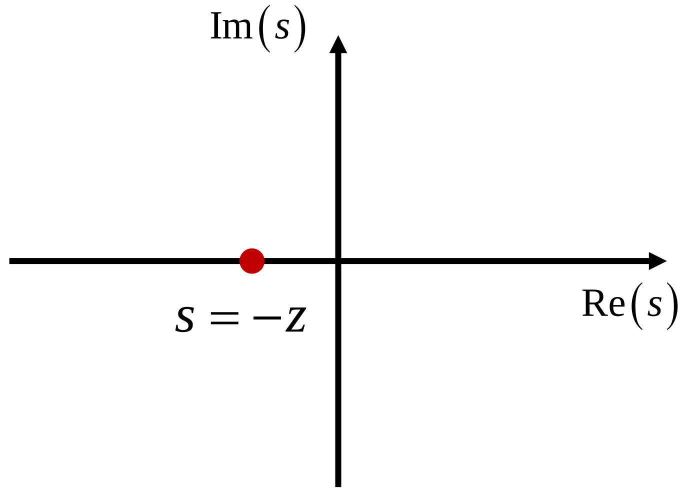


אפס שמאלי פשוט

$$H(s) = s + z$$

$z > 0$

מישור לפלס:



אפס שמאלי פשוט

$$H(s) = s + z \qquad z > 0$$

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| = 20\log_{10}\left(z\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z^2}}\right)$$

$$20\log_{10}\left|H(j\omega)\right| = -20\log_{10}\left(\frac{1}{z\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z^2}}}\right)$$

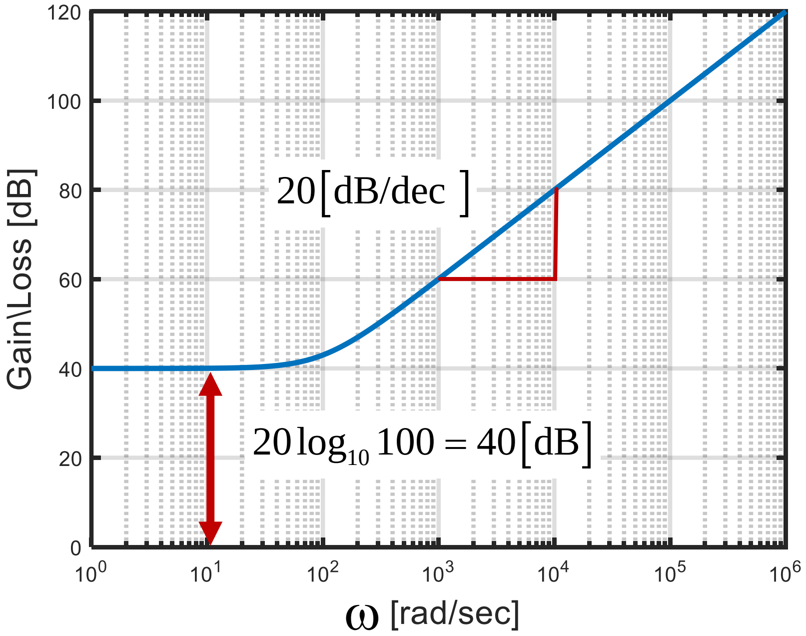
עקומת ההגבר של אפס שווה ל**מינוס** עקומת ההגבר של קוטב באותו מיקום במישור לפלס

אפס שמאלי פשוט

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right]=20\log_{10}z+20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z^2}}$$

$$p=100$$

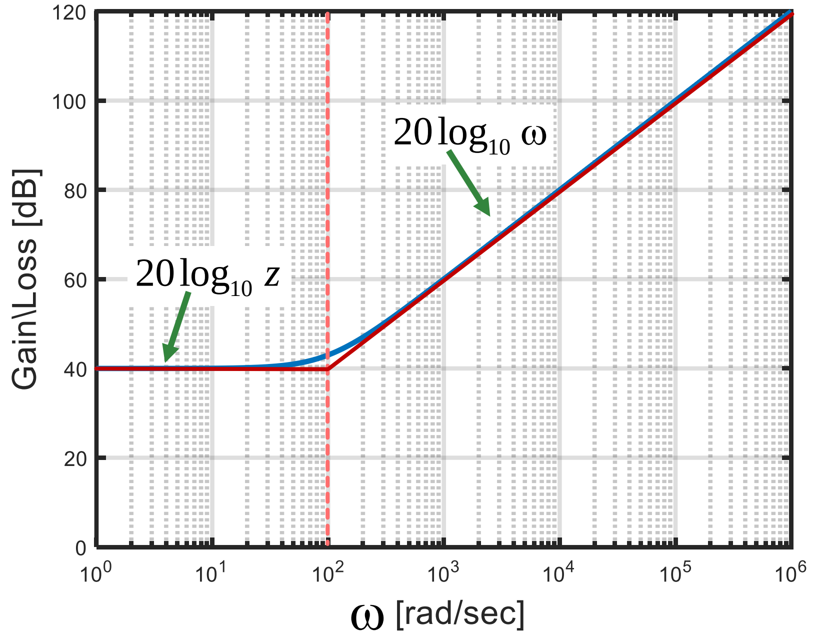


קירוב אסימפטוטי

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right] \approx \begin{cases} 20\log_{10} z & \omega \ll z \\ 20\log_{10} \omega & \omega \gg z \end{cases}$$

$$z = 100$$



אפס שמאלי פשוט

$$H(s) = s + z \qquad z > 0$$

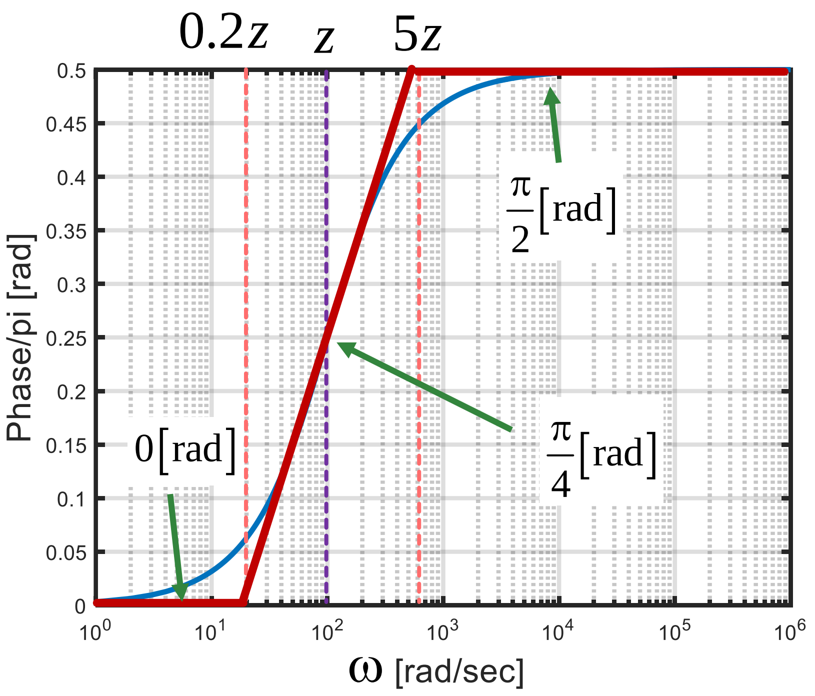
עקומת הפאזה:

$$\angle H(j\omega) = -\angle \frac{1}{H(j\omega)}$$

עקומת הפאזה של אפס שווה ל**<u>מינוס</u>** עקומת הפאזה של קוטב באותו מיקום במישור לפלס

אפס שמאלי פשוט

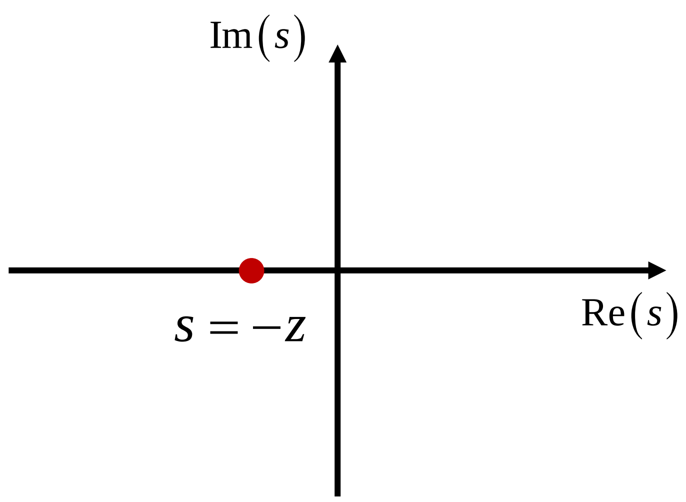
עקומת הפאזה:



אפס שמאלי מרובה

$$H(s) = (s+z)^n \qquad z > 0$$

מישור לפלס:



אפס שמאלי מרובה

$$H(s)=(s+z)^n \qquad z>0$$

$$H(s)\big|_{s=j\omega}=H(j\omega)=(j\omega+z)^n$$

$$H(s)\big|_{s=j\omega}=H(j\omega)=z^n\left(1+j\frac{\omega}{z}\right)^n$$

$$20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|=n\cdot 20\log_{10}\left(z\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z^2}}\right)$$

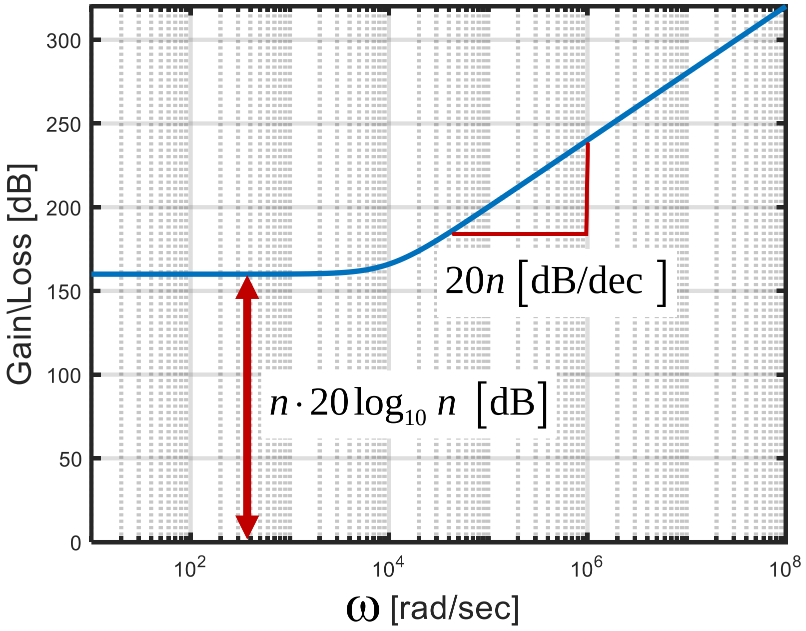
עקומת ההגבר של אפס עם ריבוי ***n*** שווה ל-***n*** כפול
עקומת ההגבר של אפס באותו מיקום במישור לפלס

אפס שמאלי מרובה

עקומת ההגבר:

$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right]=n\cdot 20\log_{10} z+n\cdot 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z^2}}$$

$$z=10^4,\ \ n=2$$

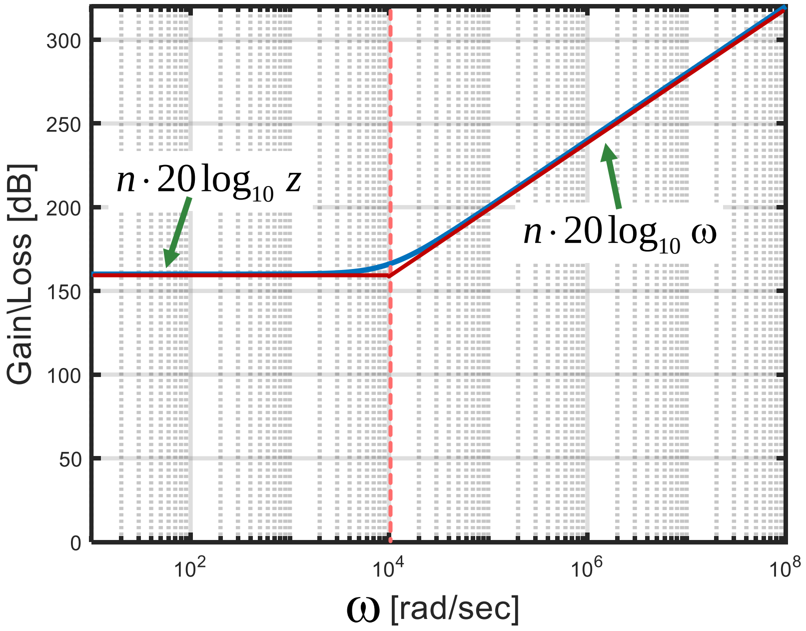


קירוב אסימפטוטי

עקומת ההגבר:

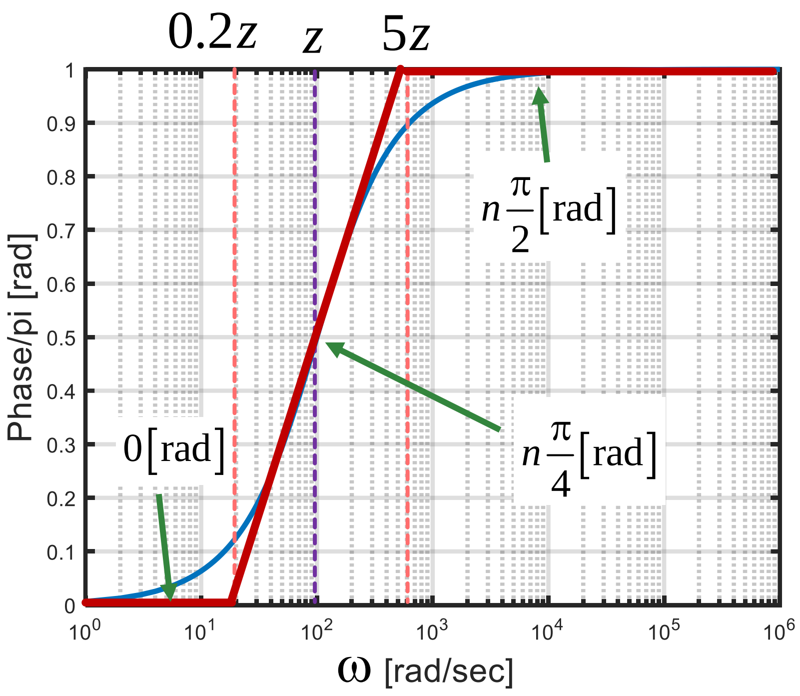
$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right] \approx \begin{cases} n\cdot 20\log_{10} z & \omega \ll z \\ n\cdot 20\log_{10} \omega & \omega \gg z \end{cases}$$

$$z = 10^4,\ \ n = 2$$



אפס שמאלי מרובה

עקומת הפאזה:



קוטב שמאלי מרובה

עקומת ההגבר של קוטב שמאלי מרובה שווה ל**מינוס** עקומת ההגבר של אפס שמאלי עם אותו ריבוי באותו מיקום במישור לפלס

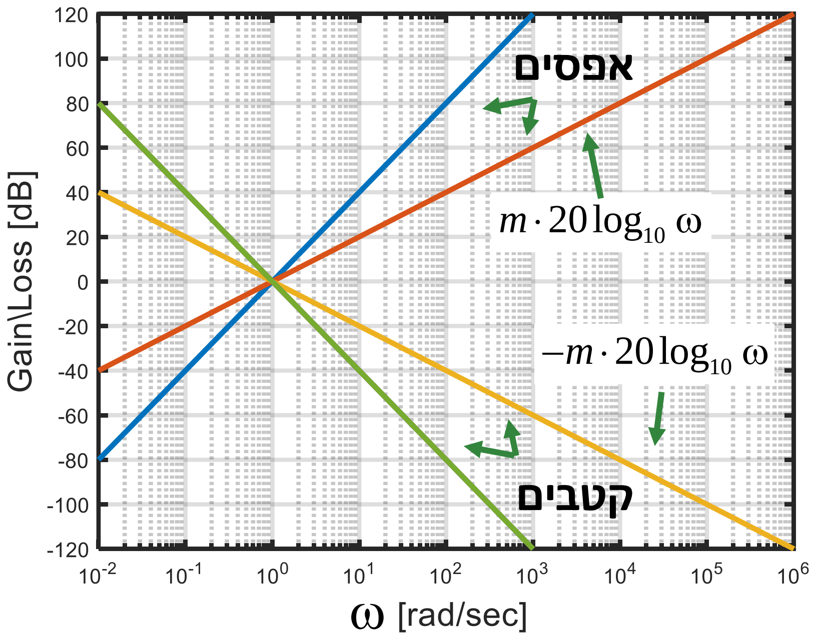
עקומת הפאזה של קוטב שמאלי מרובה שווה ל**מינוס** עקומת הפאזה של אפס שמאלי עם אותו ריבוי באותו מיקום במישור לפלס

קטבים ואפסים בראשית

$$H(s) = \frac{1}{s^m}$$

$$H(s) = s^m$$

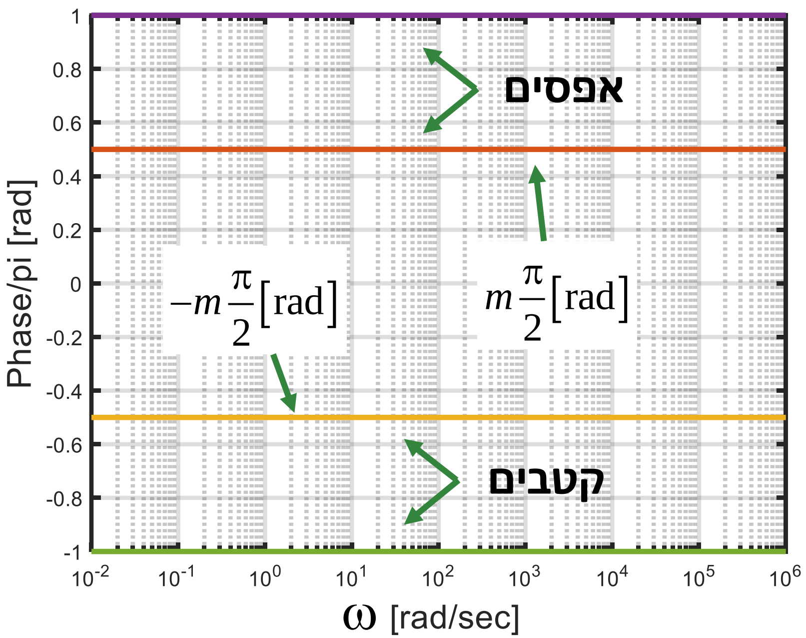
עקומת הפאזה:



קטבים ואפסים בראשית

$$H(s) = \frac{1}{s^m} \qquad H(s) = s^m$$

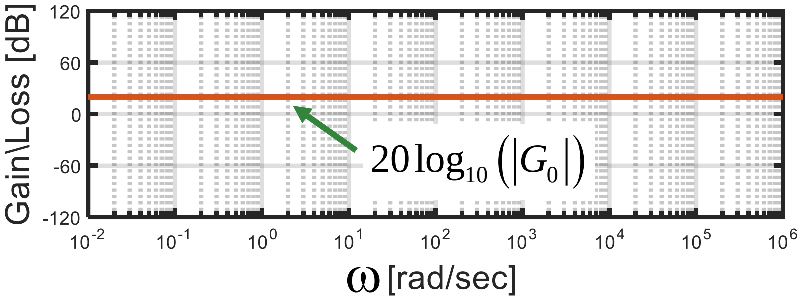
עקומת הפאזה:



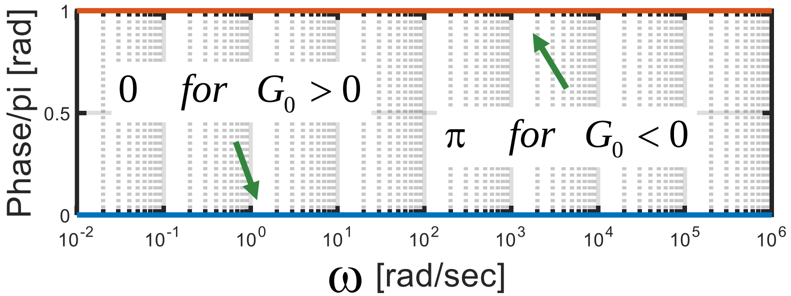
עקומת בודה של קבוע

$$H(s) = G_0$$

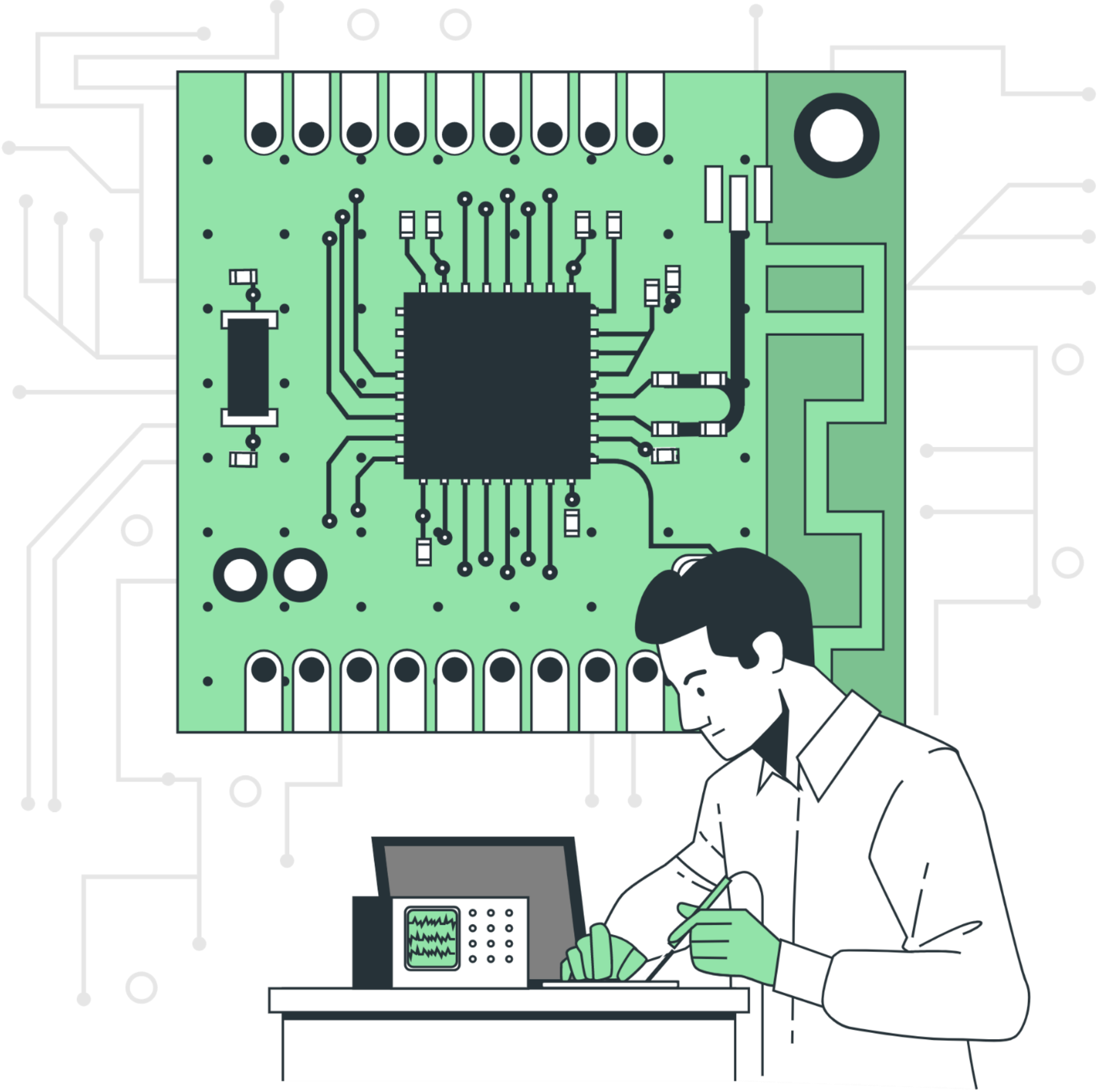
עקומת ההגבר:



עקומת הפאזה:



VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 6 : היענות לתדר ועקומות בודה

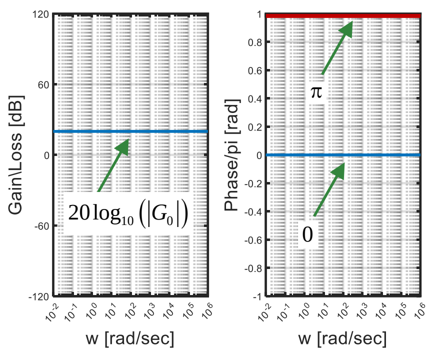
מקטע 6.4 : ציור עקומות בודה – חלק שלישי

עד עכשיו ראינו:

עקומת הפאזה: **עקומת ההגבר:**

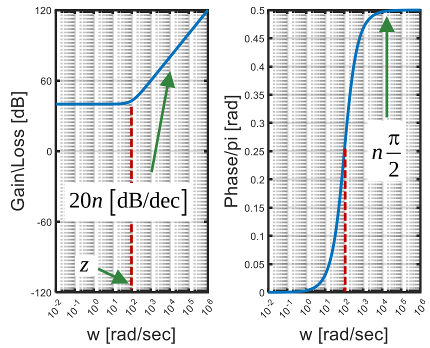
קבוע

$$H(s)=G_0$$



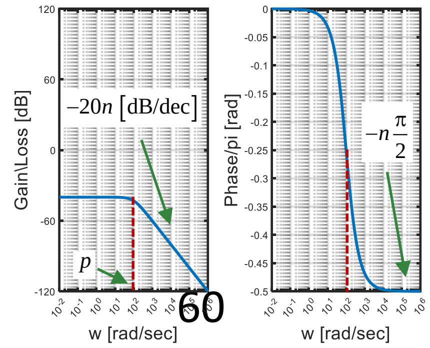
אפס

$$H(s)=(s+z)^n$$



קוטב

$$H(s)=\frac{1}{(s+p)^n}$$



דוגמא

צייר את עקומות בודה של פונקציית התמסורת הבאה:

$$H(s)=10^{3}\frac{(s+100)}{(s+1000)(s+10000)}$$

נוח להביא לצורה הבאה:

$$H(s)=10^{-2}\frac{\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{1000}\right)\left(1+\frac{s}{10000}\right)}$$

דוגמא

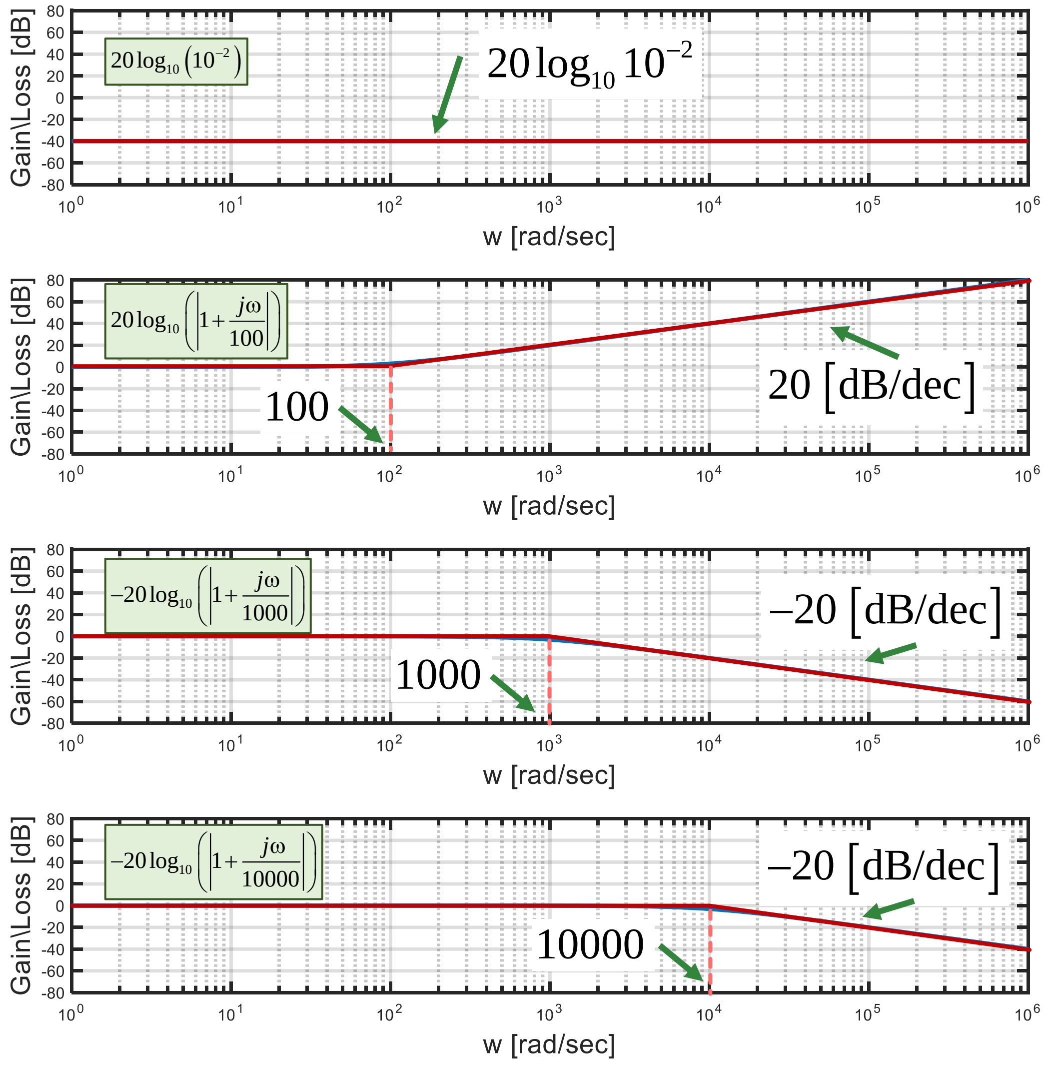
$$H(s)=10^{-2}\frac{\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{1000}\right)\left(1+\frac{s}{10000}\right)}$$

עקומת ההגבר:

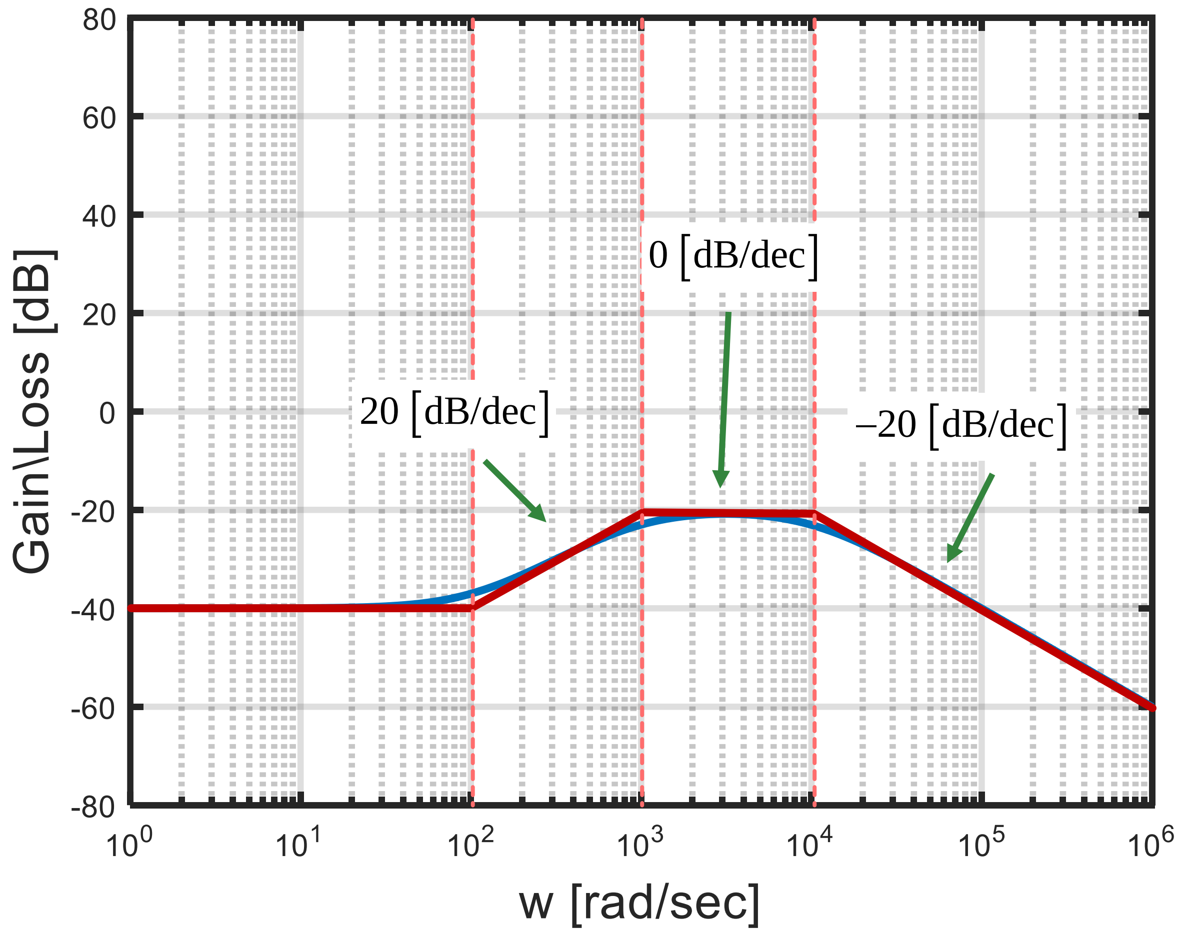
$$20\log_{10}\left[\left|H(j\omega)\right|\right]=20\log_{10}\left(10^{-2}\right)+20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|\right)+$$

$$-20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{1000}\right|\right)-20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{10000}\right|\right)$$

הגברי המחוברים



נסכום את כל המחוברים



דוגמא

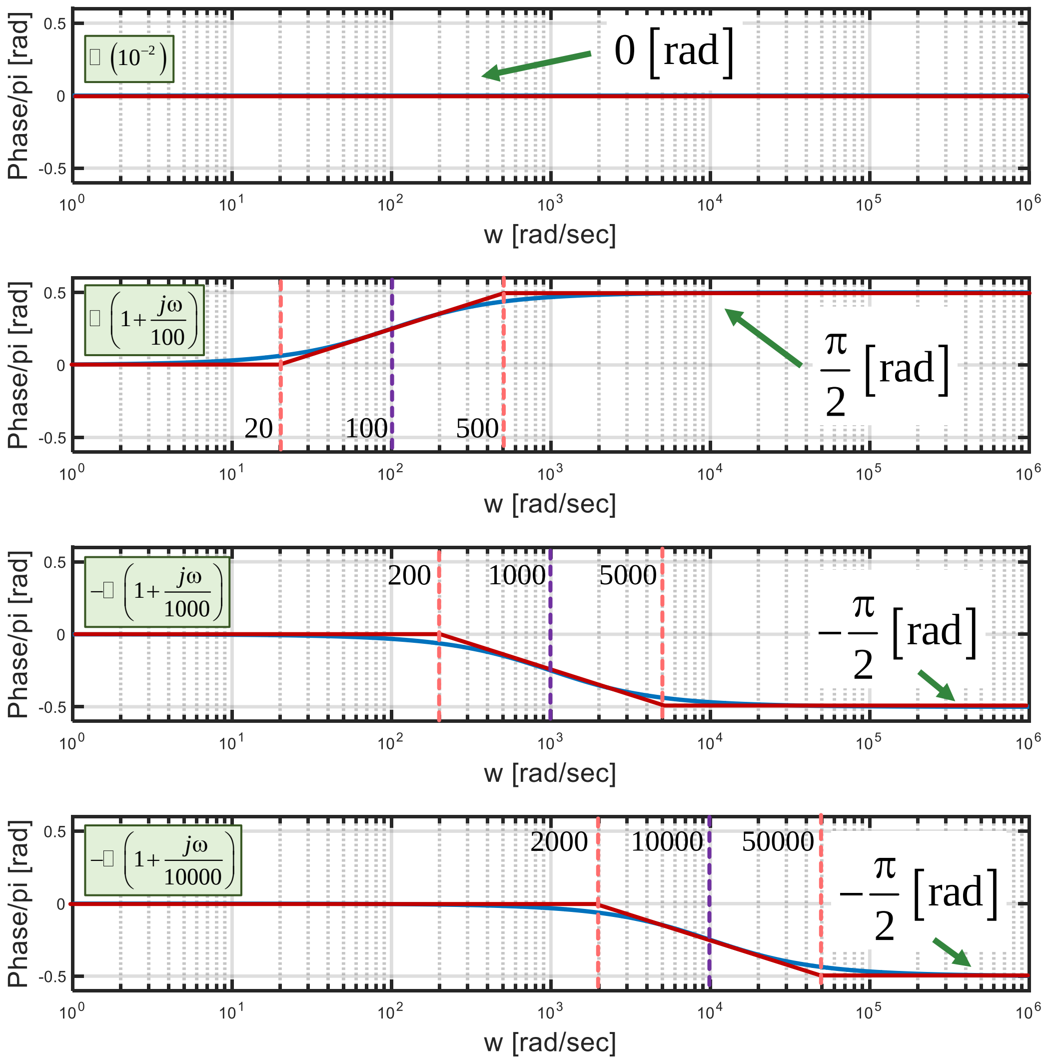
$$H(s)=10^{-2}\frac{\left(1+\frac{s}{100}\right)}{\left(1+\frac{s}{1000}\right)\left(1+\frac{s}{10000}\right)}$$

עקומת הפאזה:

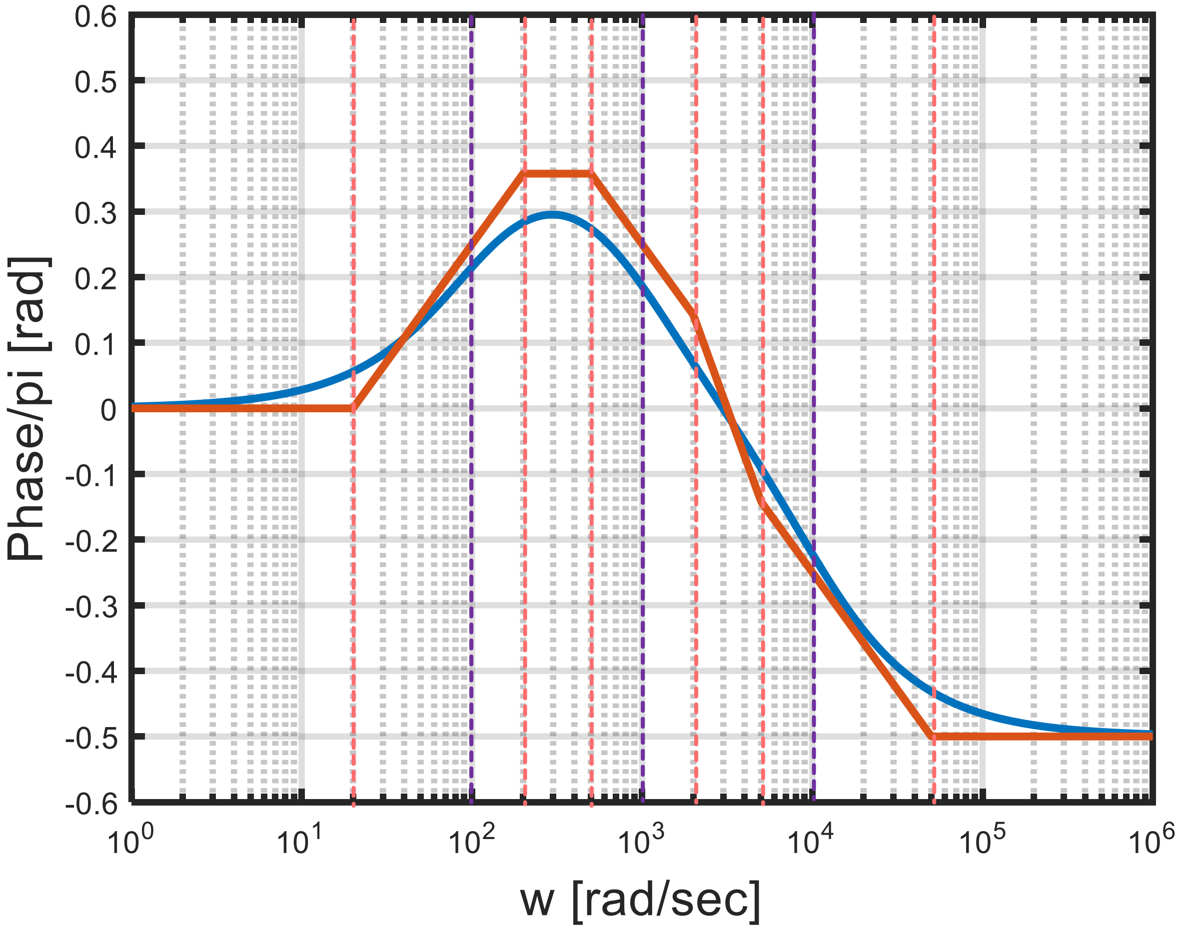
$$\angle H(j\omega)=\angle 10^{-2}+\angle\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)+$$

$$-\angle\left(1+\frac{j\omega}{1000}\right)-\angle\left(1+\frac{j\omega}{10000}\right)$$

הפאזות של המחוברים



נחבר את הפאזות



תגובת התדר

זוג אפסים מרוכבים

אפס ב-z_2 עם ריבוי n

אפס פשוט ב-z_1

אפס בראשית עם ריבוי m

אפס בראשית

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=G_0\frac{s\cdot s^m(s+z_1)(s+z_2)^n\left(s^2+2\xi_0\omega_0 s+\omega_0^2\right)}{s\cdot s^u(s+p_1)(s+p_2)^v\left(s^2+2\xi_1\omega_1 s+\omega_1^2\right)}$$

זוג קטבים מרוכבים

קוטב ב-p_2 עם ריבוי v

קוטב פשוט ב-p_1

קוטב בראשית עם ריבוי u

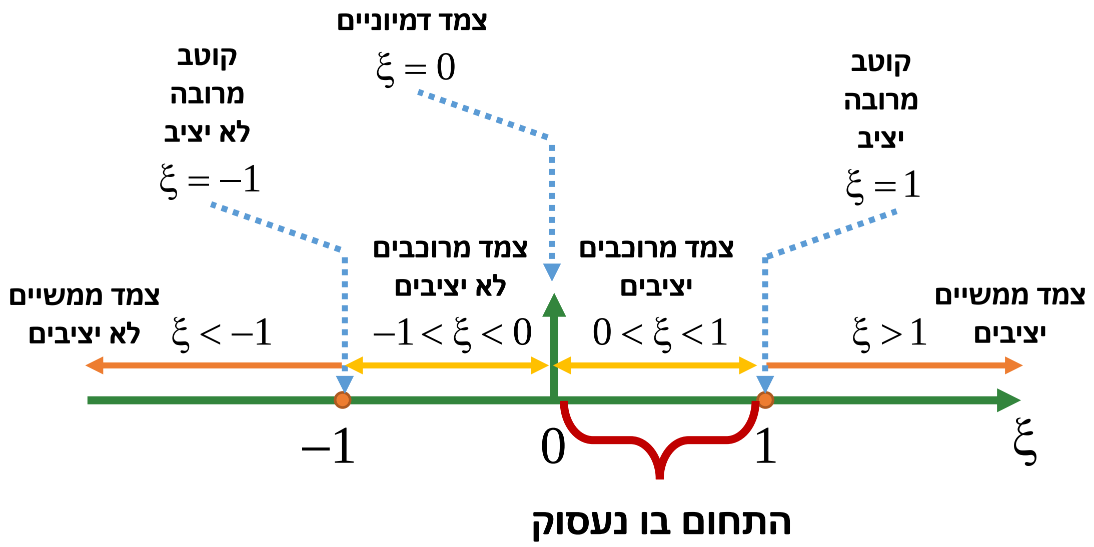
קוטב בראשית

זוג קטבים מרוכבים

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

נמצא את הקטבים:

$$s_{+,-}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$



זוג קטבים מרוכבים

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)}$$

$$H(s)=\frac{1}{\omega_n^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega_n^2}s^2+2\frac{\xi}{\omega_n}s\right)}$$

נצרף ל- G_0

גרסה מנורמלת:

$$\tilde{H}(s)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega_n^2}s^2+2\frac{\xi}{\omega_n}s\right)}$$

זוג קטבים מרוכבים

$$\tilde{H}(s)=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\omega_n^2}s^2+2\frac{\xi}{\omega_n}s\right)}$$

נציב $s = j\omega$

$$\tilde{H}(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\xi\frac{\omega}{\omega_n}j\right)}$$

עקומת ההגבר:

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}(j\omega)\right|^2\right]=-10\log_{10}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

זוג קטבים מרוכבים

עקומת ההגבר:

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}(j\omega)\right|^2\right]=-10\log_{10}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

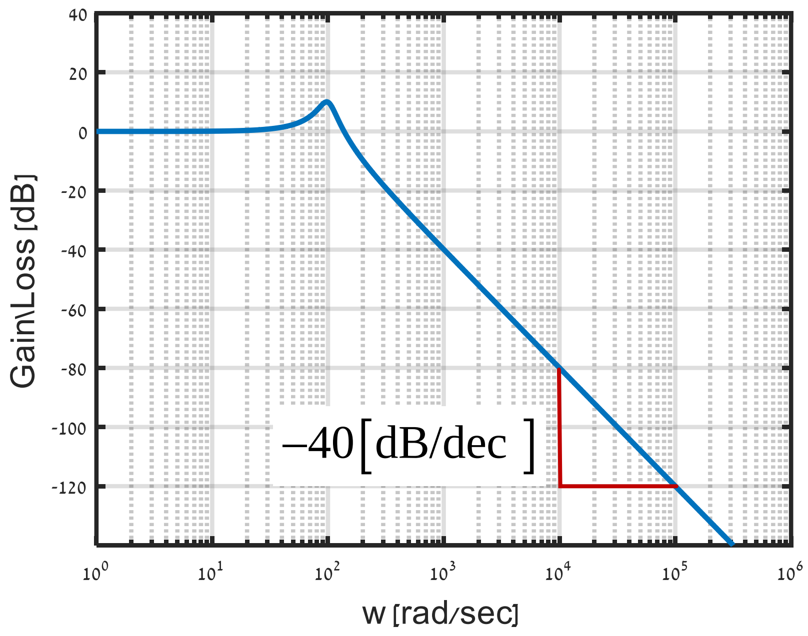
בקירוב ראשון:

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}(j\omega)\right|^2\right]=\begin{cases}0 & \omega\ll\omega_n\\ -40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega\gg\omega_n\end{cases}$$

זוג קטבים מרוכבים

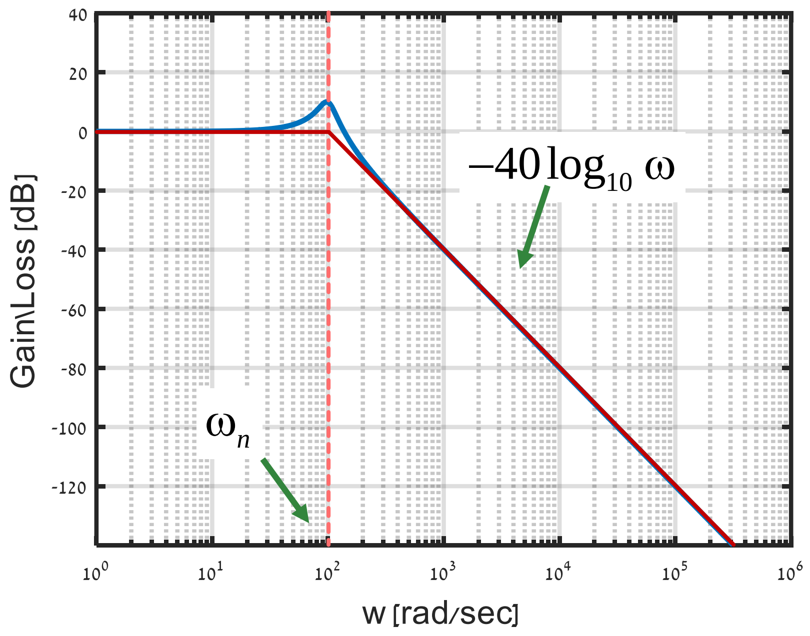
עקומת ההגבר:

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}(j\omega)\right|^2\right] = -10\log_{10}\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

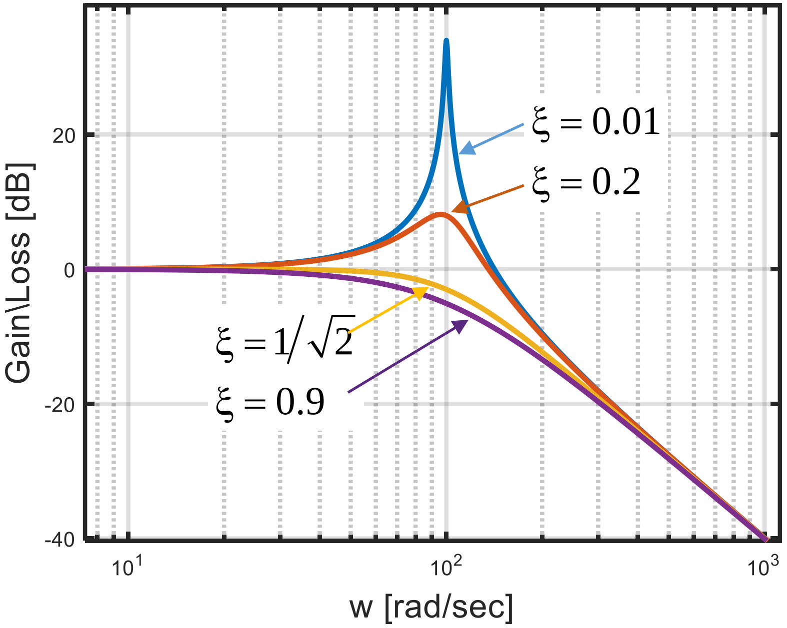


קירוב אסימפטוטי

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}(j\omega)\right|^2\right]=\begin{cases}0 & \omega \ll \omega_n\\ -40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) & \omega \gg \omega_n\end{cases}$$



השגיאה



עבור $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$ **ההגבר מקבל מקסימום מקומי.**

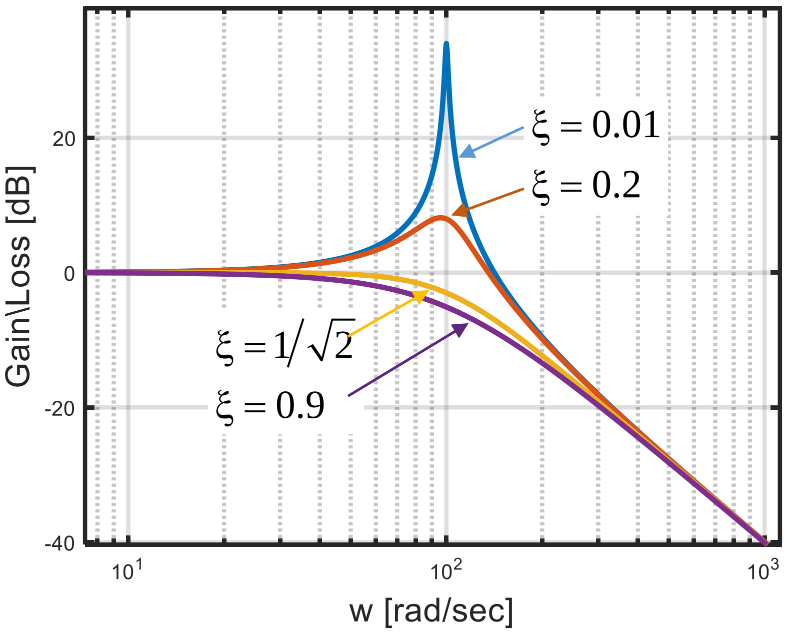
מיקום המקסימום:

$$\omega_{\max} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$$

גובה המקסימום:

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}(j\omega)\right|^2\right] = -10\log_{10}\left[4\xi^2\left(1-\xi^2\right)\right]$$

השגיאה



עבור $1 \ll \xi$ מקבלים:

מיקום המקסימום:

$$\omega_{\max} = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \approx \omega_n$$

גובה המקסימום:

$$10\log_{10}\left[\left|\tilde{H}\left(j\omega\right)\right|^2\right] \approx -20\log_{10}\left(2\xi\right)$$

זוג קטבים מרוכבים

עקומת הפאזה:

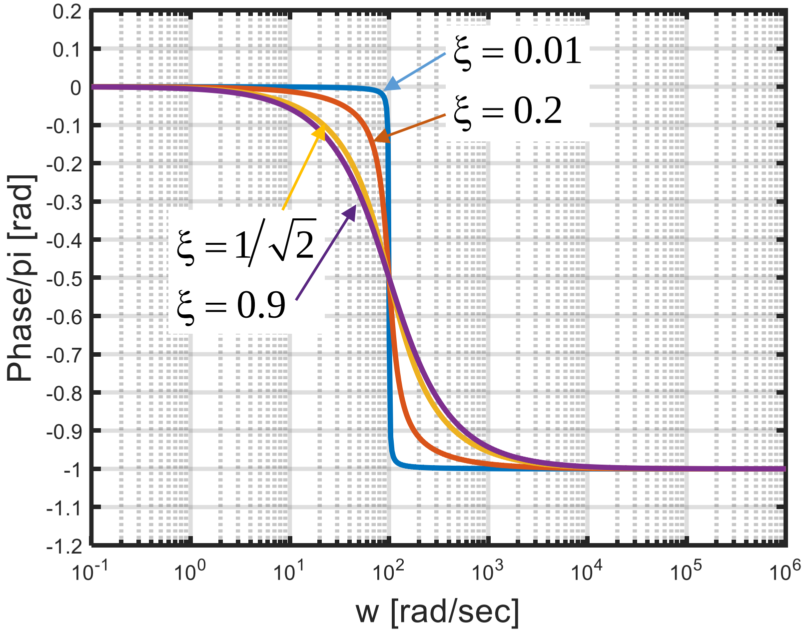
$$\angle \tilde{H}(j\omega) = -\angle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{\omega}{\omega_n}j\right)$$

$$\angle \tilde{H}(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$

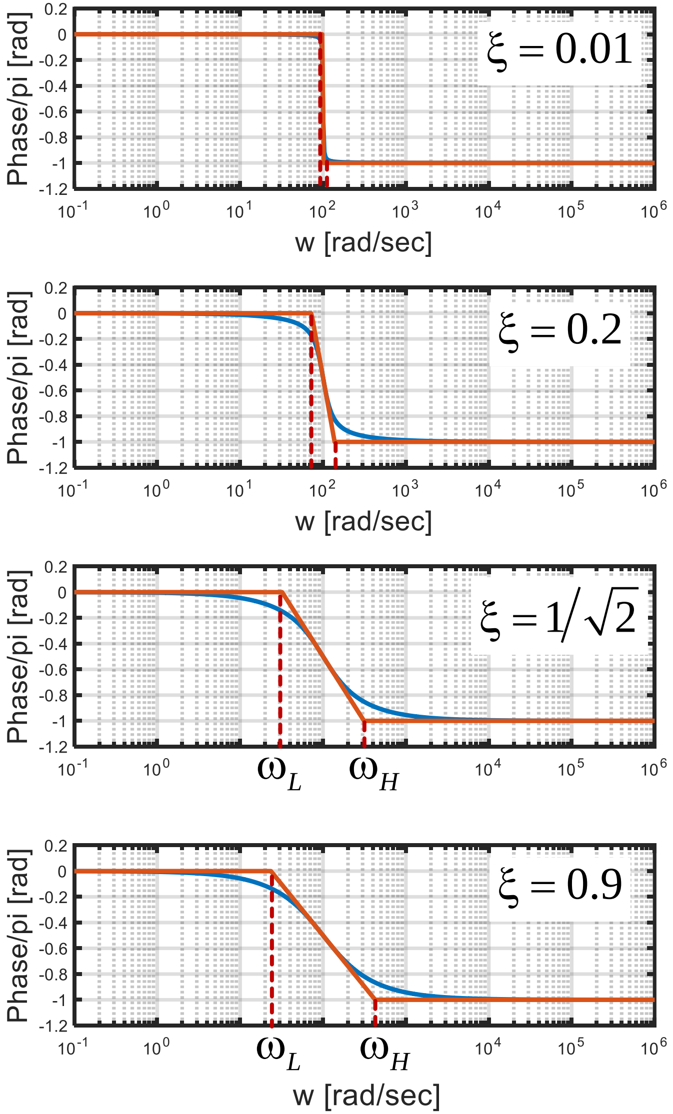
זוג קטבים מרוכבים

עקומת הפאזה:

$$\angle \tilde{H}(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right)$$



קירוב אסימפטוטי



קירוב אסימפטוטי

איך נבחר את ω_L ו- ω_H

שיטה ראשונה:

$$\omega_L = 0.2^{\xi}\omega_n$$

$$\omega_H = 5^{\xi}\omega_n$$

שיטה שנייה:

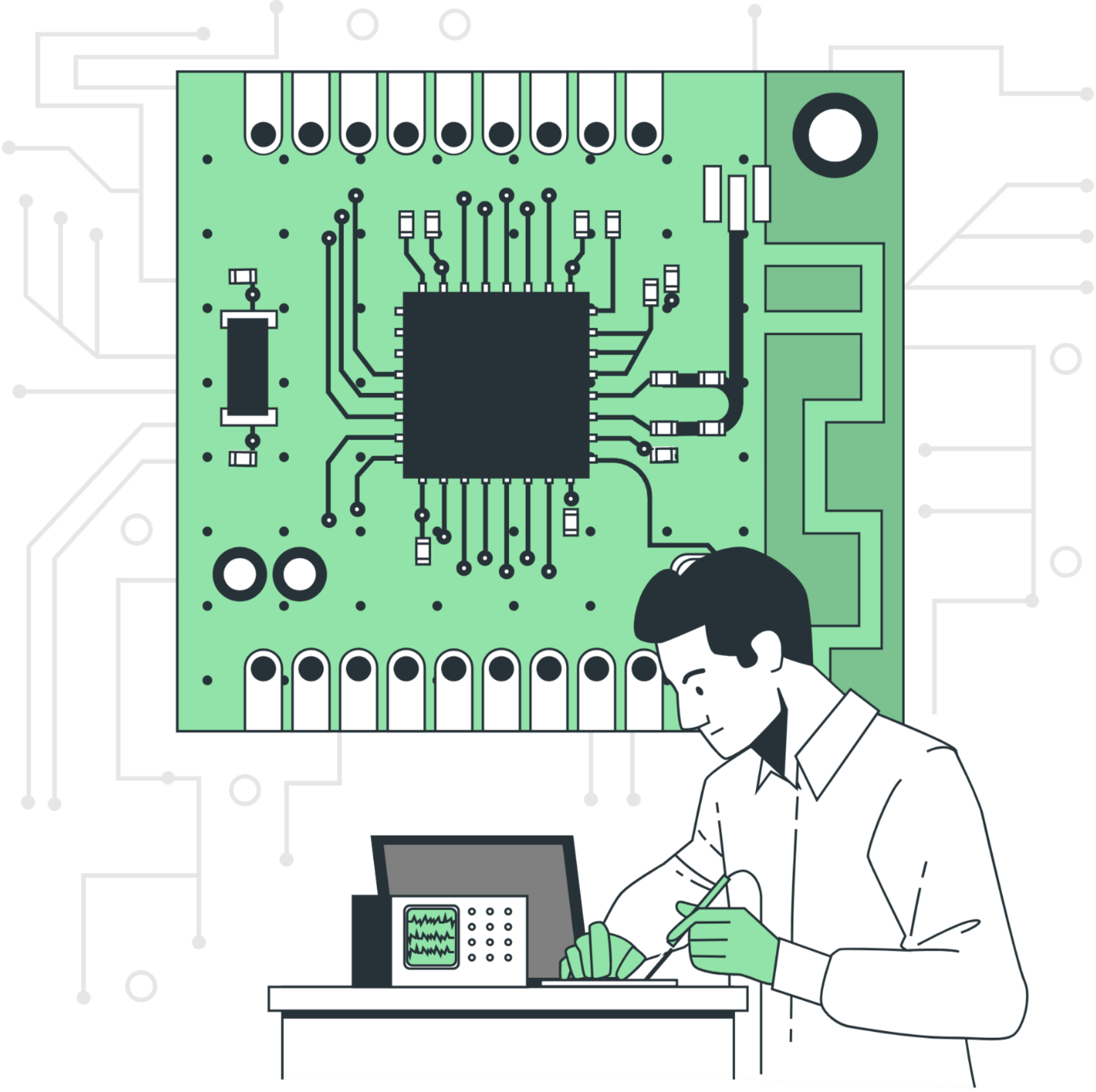
$$\omega_L = \frac{\omega_n}{1+5\xi}$$

$$\omega_H = (1+5\xi)\omega_n$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל



יחידה 6 : היענות לתדר ועקומות בודה

מקטע 6.5 : עקומות בודה – דוגמאות

מידע מעקומות בודה

אפס בראשית

אפס בראשית עם ריבוי m

אפס פשוט ב-z_1

אפס ב-z_2 עם ריבוי n

זוג אפסים מרובבים

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=G_0\frac{s\cdot s^m\left(s+z_1\right)\left(s+z_2\right)^n\left(s^2+2\xi_0\omega_0 s+\omega_0^2\right)}{s\cdot s^u\left(s+p_1\right)\left(s+p_2\right)^v\left(s^2+2\xi_1\omega_1 s+\omega_1^2\right)}$$

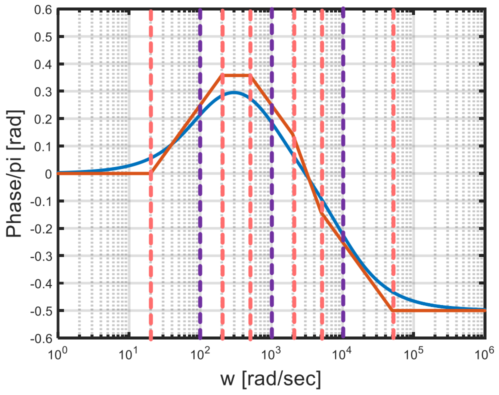
קוטב בראשית

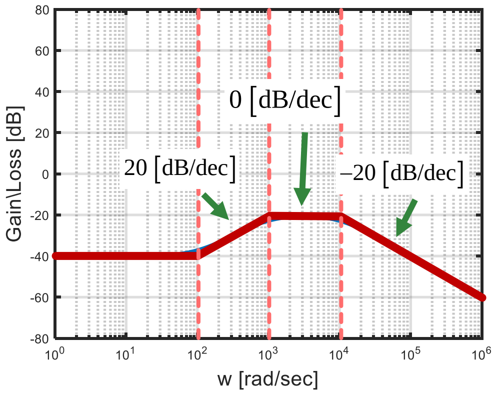
קוטב בראשית עם ריבוי u

קוטב פשוט ב-p_1

קוטב ב-p_2 עם ריבוי v

זוג קטבים מרובבים





מידע מעקומות בודה

נתקדם לאורך עקומת ההגבר משמאל לימין:

1. אם אין קטבים או אפסים בראשית, ההגבר כש- $\omega \to 0$ שווה ל- $20\log_{10}\left|\tilde{G}_0\right|$, כאשר $\tilde{G}_0$ הוא ההגבר של פונקציית ההגבר כאשר היא נרשמת בצורה סטנדרטית

2. כל אפס מגדיל את השיפוע ב- $20\ [\mathrm{dB/dec}]$

3. כל קוטב מקטין את השיפוע ב- $20\ [\mathrm{dB/dec}]$

4. השיפוע ב- $\omega \to \infty$ הוא $20n\ [\mathrm{dB/dec}]$ כאשר n הוא ההפרש בין מספר האפסים למספר הקטבים.

מידע מעקומות בודה

נתקדם לאורך עקומת <u>הפאזה</u> משמאל לימין:

במערכת 'מינימום פאזה' (שבה כל הקטבים והאפסים
בצד השמאלי של מישור לפלס):

1. אם אין קטבים או אפסים בראשית, הפאזה כש- $\omega \to 0$ שווה ל- $\square \tilde{G}_0$. כלומר, אם $\tilde{G}_0$ חיובי, הפאזה היא אפס ואם $\tilde{G}_0$ שלילי, הפאזה היא $\pi\left[\mathrm{rad}\right]$
2. כל אפס <u>מגדיל</u> את הפאזה ב- $\pi/2\left[\mathrm{rad}\right]$
3. כל קוטב <u>מקטין</u> את הפאזה ב- $\pi/2\left[\mathrm{rad}\right]$
4. הפאזה ב- $\omega \to \infty$ היא $n\pi/2\left[\mathrm{rad}\right]$ כאשר n הוא ההפרש בין מספר האפסים למספר הקטבים.

ציור עקומות בודה: דוגמא

צייר את עקומות בודה של פונקציית התמסורת הבאה:

$$H(s)=\frac{10s}{(s+100)\left(s^2+1.8\cdot 10^4 s+10^8\right)}$$

נוח להביא לצורה הסטנדרטית:

$$H(s)=10^{11}\frac{s}{\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{1}{10^8}s^2+2\frac{0.9}{10^4}s\right)}$$

דוגמא

$$H(s)=10^{11}\frac{s}{\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{1}{10^8}s^2+2\frac{0.9}{10^4}s\right)}$$

מה יש לנו כאן?

1. **הגבר כולל** $G_0=10^{11}$
2. **אפס בראשית** $\omega_{n1}=0$
3. **קוטב** $\omega_{n2}=100$
4. **קוטב מרוכב** $\omega_{n3}=10^4$ $\xi_{n2}=0.9$

דוגמא

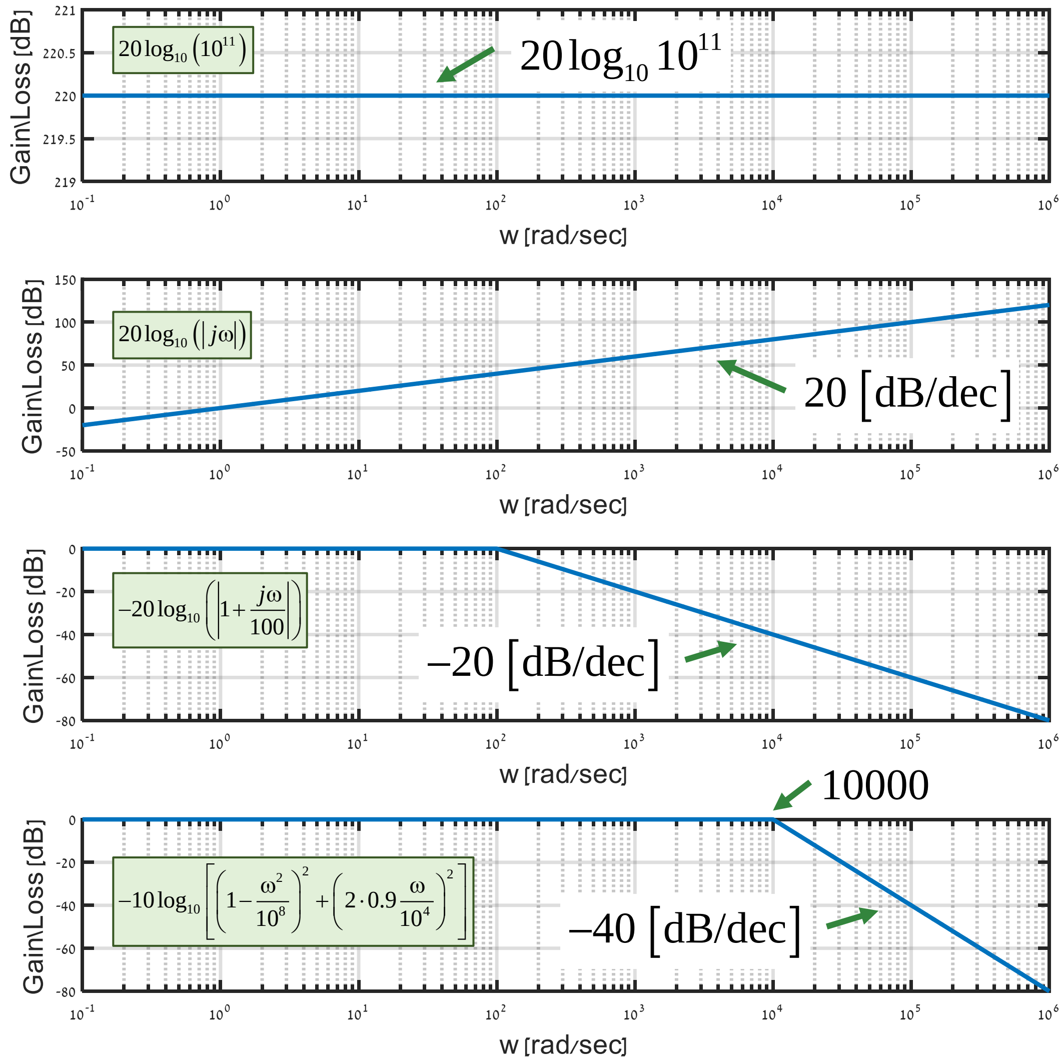
$$H\left(s\right)=10^{11}\frac{s}{\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{1}{10^{8}}s^{2}+2\frac{0.9}{10^{4}}s\right)}$$

עקומת ההגבר:

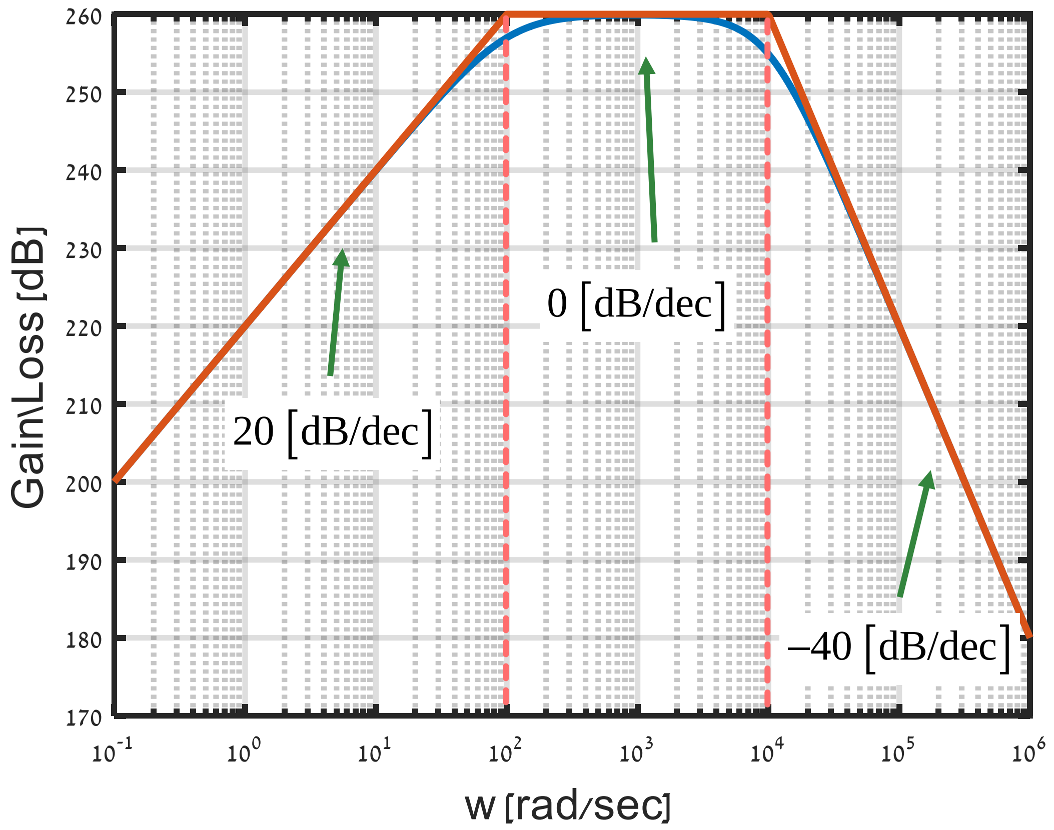
$$20\log_{10}\left[\left|H\left(j\omega\right)\right|\right]=20\log_{10}\left(10^{11}\right)+20\log_{10}\left(\omega\right)+$$

$$-20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{100}\right|\right)-10\log_{10}\left[\left(1-\frac{\omega^{2}}{10^{8}}\right)^{2}+\left(2\cdot0.9\frac{\omega}{10^{4}}\right)^{2}\right]$$

הגברי המחוברים



נסכום את כל המחוברים



דוגמא

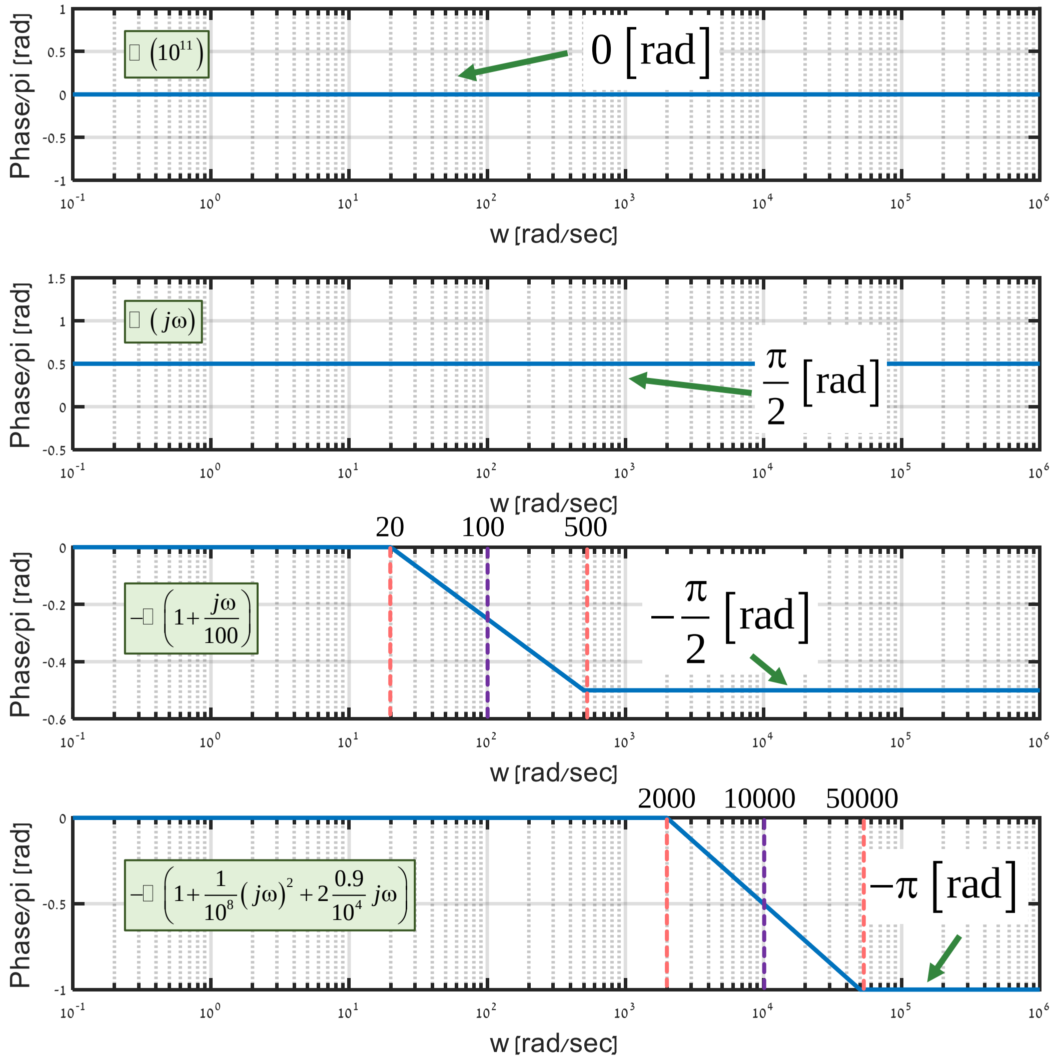
$$H(s) = 10^{11} \frac{s}{\left(1+\frac{s}{100}\right)\left(1+\frac{1}{10^8}s^2+2\frac{0.9}{10^4}s\right)}$$

עקומת הפאזה:

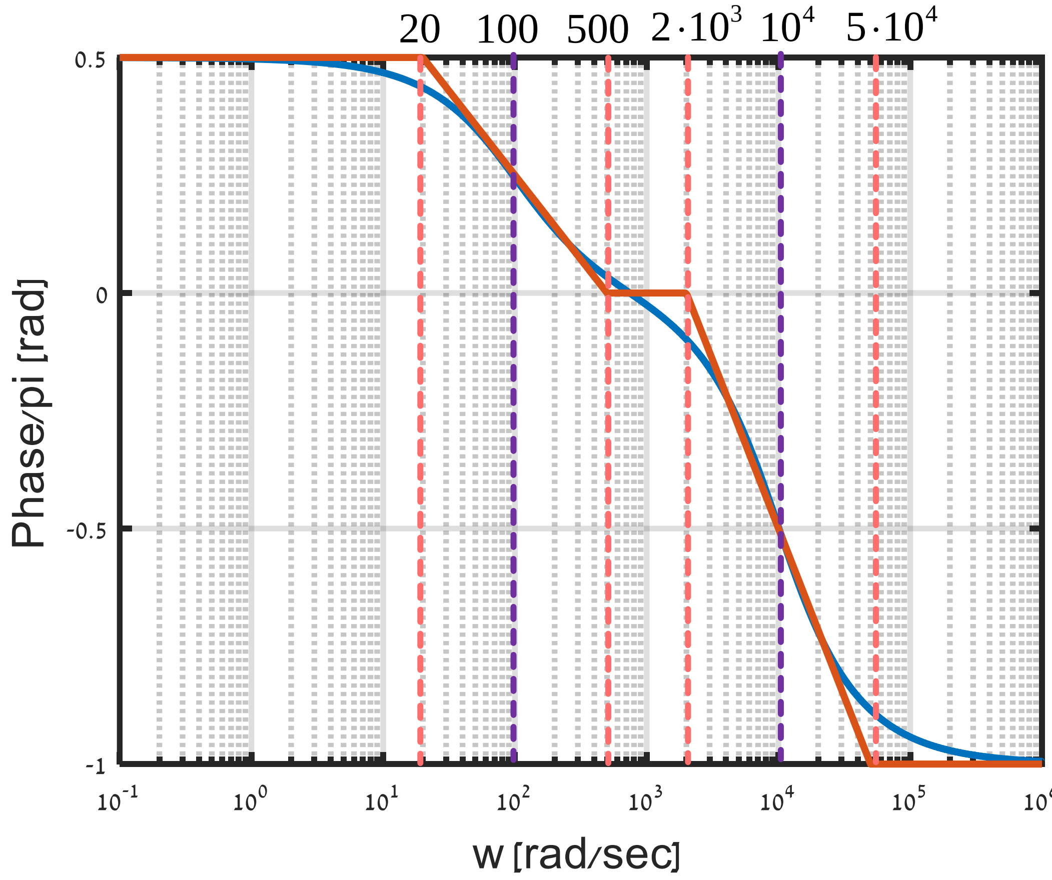
$$\angle H(j\omega) = \angle 10^{11} + \angle (j\omega) +$$

$$-\angle\left(1+\frac{j\omega}{1000}\right) - \angle\left(1+\frac{1}{10^8}(j\omega)^2+2\frac{0.9}{10^4}j\omega\right)$$

הפאזות של המחוברים



נחבר את הפאזות



דוגמא נוספת

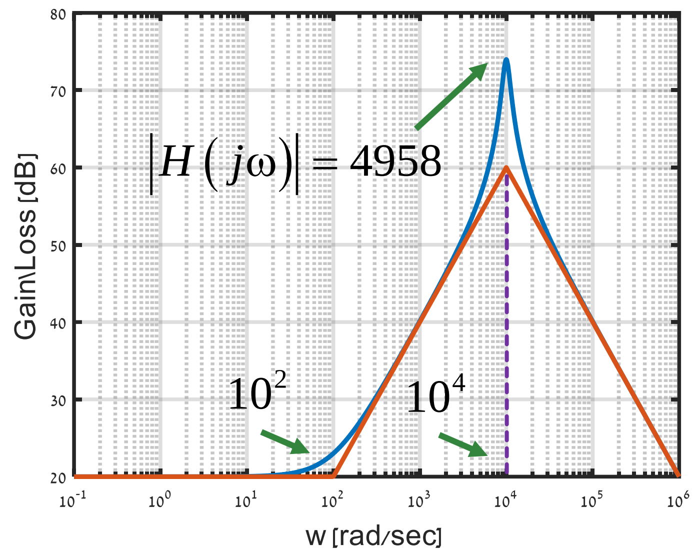
נתונות עקומות הבודה של פונקציית תמסורת.

נתון גם כי בתדר הברך $\omega = 10^4$ ההגבר הוא:

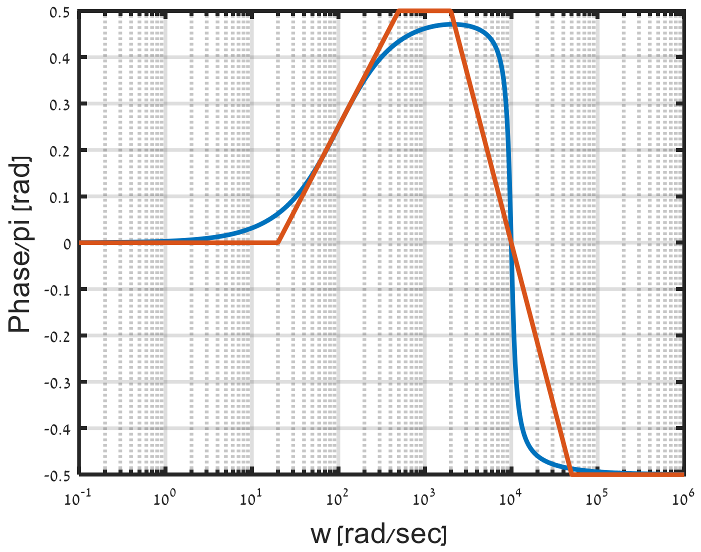
$$\left| H\left(j\omega \right) \right| = 4958$$

מצא את פונקציית התמסורת.

הגבר


GainLoss [dB]
w [rad/sec]
$|H(j\omega)| = 4958$
10^2
10^4

פאזה


Phase/pi [rad]
w [rad/sec]

ניתן לראות:

1. ההגבר ב- $\omega \Rightarrow 0$ הוא $20\,[\mathrm{dB}]$
2. הפאזה של ההגבר ב- $\omega \Rightarrow 0$ היא 0
3. יש ברך ב- $\omega = 100$ ואחריה מתחילה עלייה בהגבר של $20\,[\mathrm{dB/dec}]$
4. יש ברך נוספת ב- $\omega = 10^4$ ואחריה מתחילה ירידה של $-20\,[\mathrm{dB/dec}]$

ולכן:

$$H(s)=G_0\frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{n1}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\omega_{n2}^2}s^2+2\frac{\xi}{\omega_{n2}}s\right)}$$

כאשר:

$$20\log_{10}|G_0|=20\ [\text{dB}] \Rightarrow G_0=10$$

$$\omega_{n1}=100\ [\text{rad/sec}]$$

$$\omega_{n2}=10^4\ [\text{rad/sec}] \qquad \xi=?$$

נמצא את ξ

$$|H(j\omega)|^2 = G_0^2 \frac{\left|1+\frac{j\omega}{\omega_{n1}}\right|^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2}\right)^2 + \left(2\frac{\xi\omega}{\omega_{n2}}\right)^2}$$

$$|H(j10^4)|^2 = G_0^2 \frac{\left|1+\frac{j10^4}{100}\right|^2}{(2\xi)^2} = 4958^2$$

$$10^2 \frac{100^2}{4\cdot\xi^2} = 4958^2 \quad \Rightarrow \quad \xi = 10\frac{100}{2\cdot 4958} = 0.1$$

דוגמא נוספת

נתונה תגובה להלם של מערכת:

$$h(t)=10\left(0.01e^{-10t}+e^{-10^5 t}\right)u(t)$$

מצא את עקומות הבודה של המערכת.

ראינו במקטע 5.3

$$\begin{tikzcd}
x(t)=\delta(t) \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{H(s)\Leftrightarrow h(t)} \arrow[r] & h(t) \\
X(s)=1 \arrow[dr] & & H(s) \arrow[u] \\
& Y(s)=H(s) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$H(s)=\mathcal{L}\left\{h(t)\right\}$$

פונקציית התמסורת היא התמרת לפלס של התגובה להלם של המערכת

דוגמא נוספת

נתונה תגובה להלם של מערכת:

$$h(t) = 10\left(0.01e^{-10t} + e^{-10^5 t}\right)u(t)$$

מצא את עקומות הבודה של המערכת.

נעשה התמרת לפלס:

$$H(s) = \frac{0.1}{s+10} + \frac{10}{s+10^5}$$

דוגמא נוספת

נביא לצורה סטנדרטית:

$$H(s)=\frac{0.1}{s+10}+\frac{10}{s+10^5}$$

$$H(s)=\frac{(10.1s+10100)}{(s+10)(s+10^5)}$$

$$H(j\omega)=\frac{10.1}{10\cdot10^5}\frac{\left(1+\frac{j\omega}{1000}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10^5}\right)}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

דוגמא

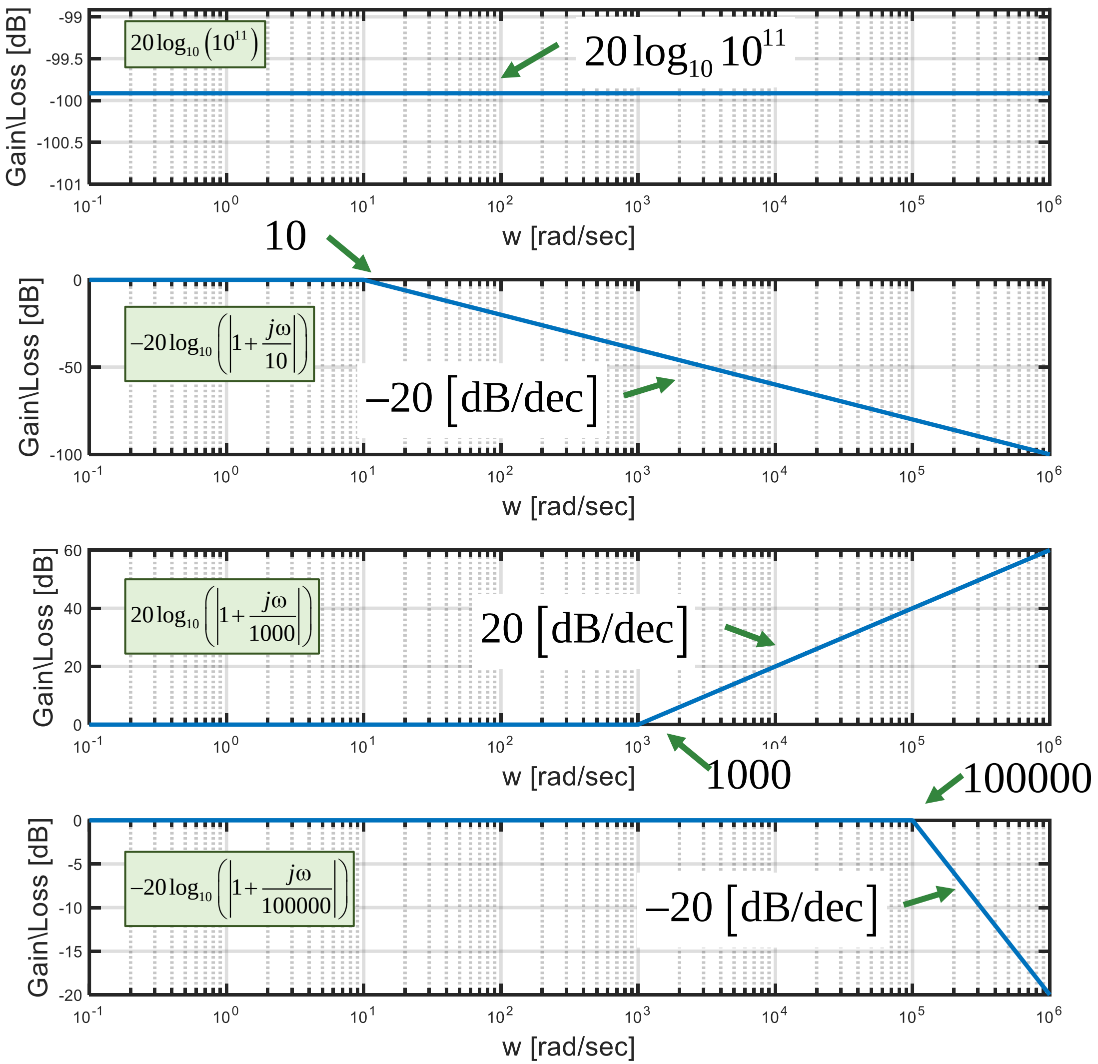
$$H(j\omega)=\frac{10.1}{10\cdot 10^{5}}\frac{\left(1+\frac{j\omega}{1000}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10^{5}}\right)}$$

עקומת ההגבר:

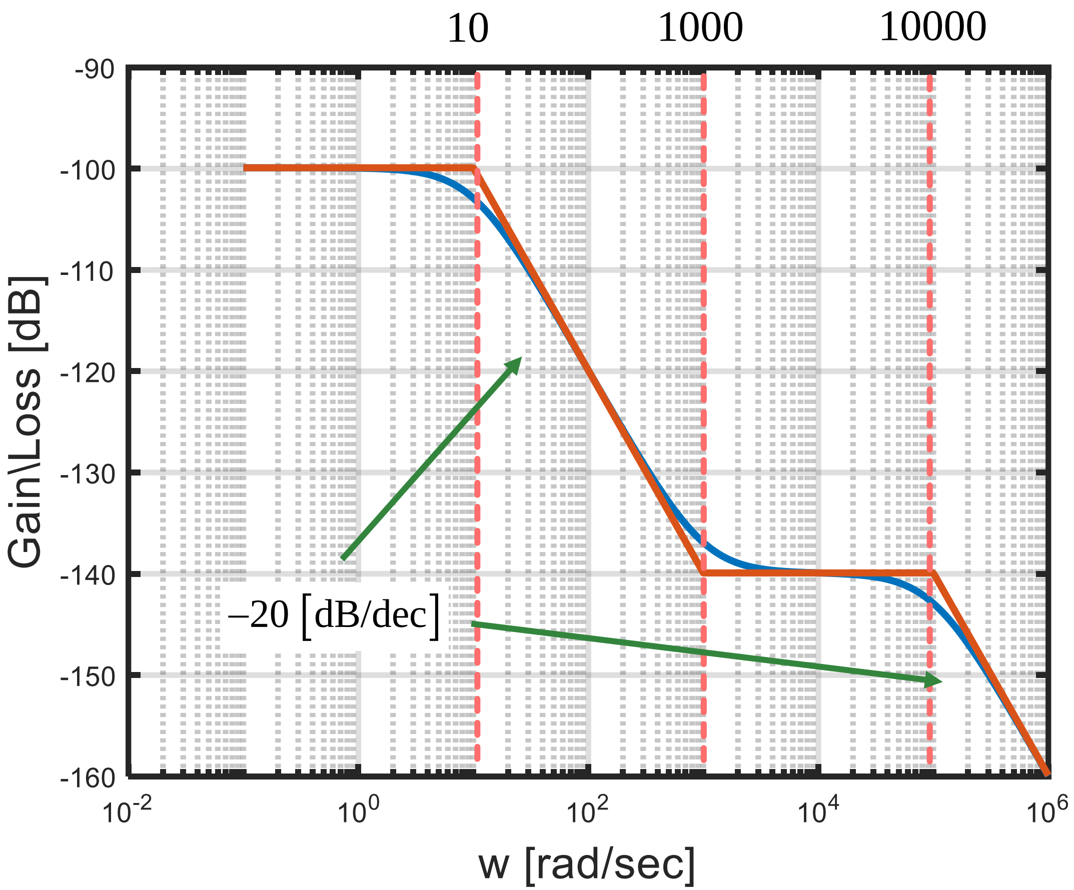
$$20\log_{10}\left[\left|H(j\omega)\right|\right]=20\log_{10}\left(1.01\cdot 10^{-5}\right)-20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{10}\right|+$$

$$+20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{1000}\right|\right)-20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{100000}\right|\right)$$

הגברי המחוברים



נסכום את כל המחוברים



דוגמא

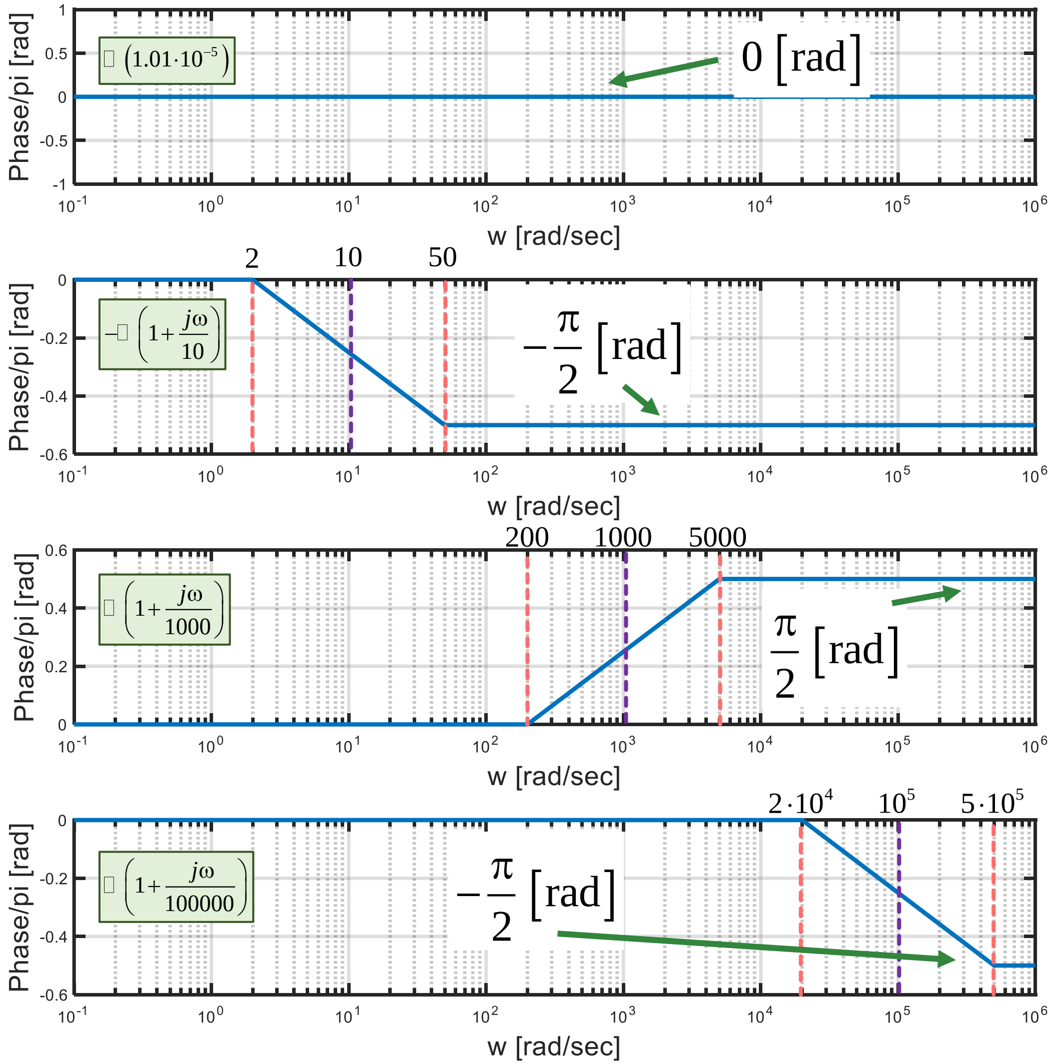
$$H(j\omega)=\frac{10.1}{10\cdot 10^{5}}\frac{\left(1+\frac{j\omega}{1000}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10^{5}}\right)}$$

עקומת הפאזה:

$$\angle H(j\omega)=\angle 1.01\cdot 10^{-5}-\angle\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)+$$

$$+\angle\left(1+\frac{j\omega}{1000}\right)-\angle\left(1+\frac{j\omega}{100000}\right)$$

הפאזות של המחוברים



נחבר את הפאזות