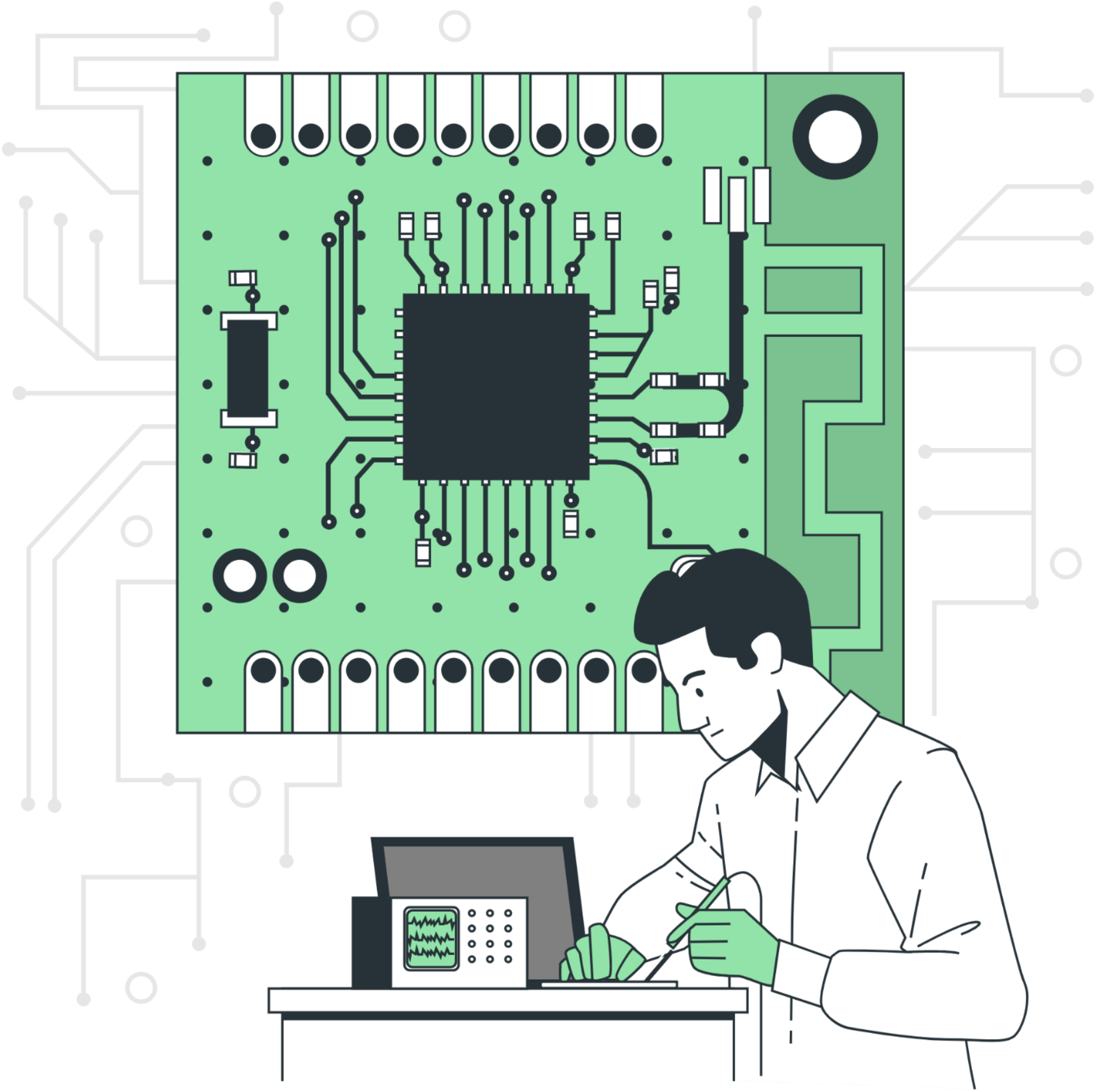
VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 5 : טרנספורם לפלס

מקטע 5.1 : טרנספורם לפלס – הגדרה ותכונות

הגדרה

טרנספורם לפלס:

$$F(s) = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

הפונקציה $F(s)$ נקראית טרנספורם לפלס של $f(t)$

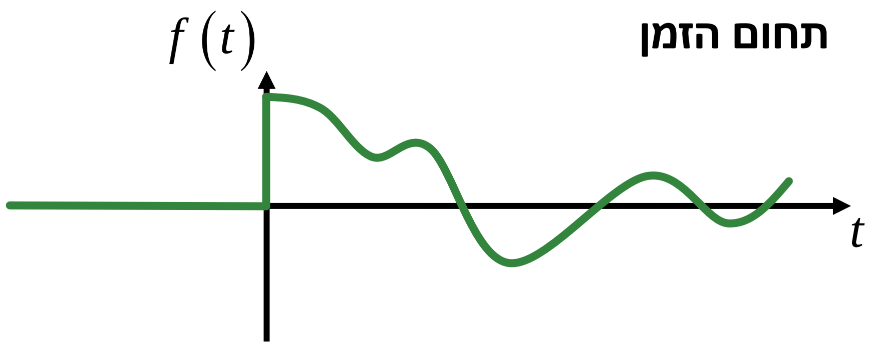
$$\mathrm{Re}\{s\} = \sigma$$

$$\mathrm{Im}\{s\} = \omega$$

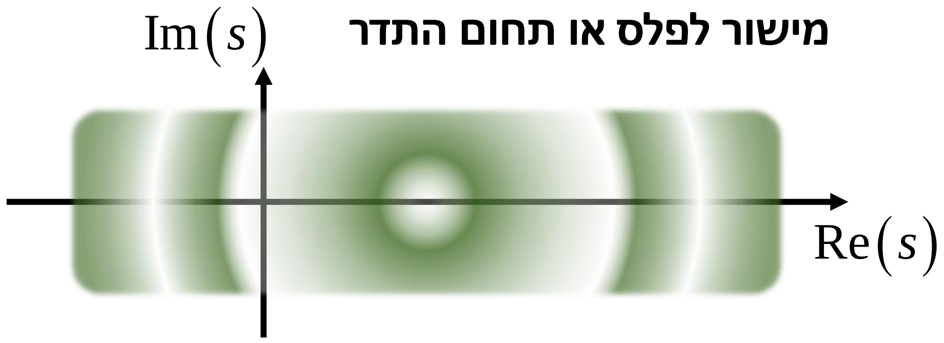
תדר

הגדרה

תחום הזמן



מישור לפלס או תחום התדר



הערות:

טרנספורם לפלס:

$$F(s)=\int_{t=0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$s=\sigma+j\omega$$

1. אנחנו משתמשים בהגדרה החד צדדית היות והפונקציות אצלנו מתחילות ב- $t=0$
2. האינטרגרל כולל את הזמן $t=0^-$
3. האינטגרל לא מתכנס לכל s . תחום ההתכנסות תלוי ב $f(t)$
4. קיים ביטוי דומה להתמרה ההפוכה

דוגמא:

מצא את התמרת לפלס של:

$$f(t)=u(t)$$

$$F(s)=\int_{t=0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt=\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st}dt$$

$$F(s)=\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt=\begin{cases}\infty & \sigma<0\\ ? & \sigma\geq 0\end{cases}$$

$$\sigma=\mathrm{Re}\{s\}$$

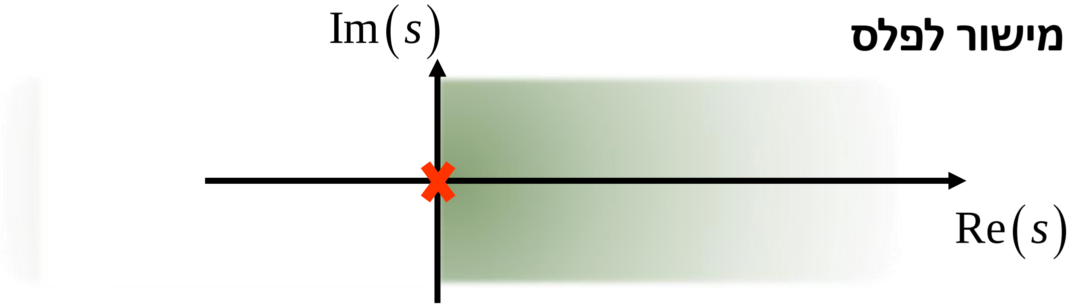
דוגמא:

מצא את התמרת לפלס של: $f(t)=u(t)$

$$F(s)=\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0^-}^{\infty}$$

$$F(s)=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0^-}^{\infty}=\frac{1}{s}$$

מישור לפלס



למה שנרצה לעבור למישור לפלס?

מד"ר בתחום הזמן ← קשה לפתור

התמרת לפלס

משוואה אלגברית במישור לפלס ← קל לפתור

התמרת לפלס הפוכה

הפתרון המלא בתחום הזמן

למה שנרצה לעבור למישור לפלס?

מד"ר בתחום הזמן ← **קשה לפתור**

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

משוואה אלגברית
במישור לפלס ← **קל לפתור**

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

הפתרון המלא
בתחום הזמן

פונקציות חשובות:

$$f(t) = u(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

$$F(s) = \int_{t=0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{t=0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > -a$$

פונקציות חשובות:

$$f(t)=u(t) \qquad F(s)=\frac{1}{s}$$

$$f(t)=e^{-at}u(t) \qquad F(s)=\frac{1}{s+a}$$

$$f(t)=\delta(t)$$

$$F(s)=\int_{t=0^-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$$

$$for \quad all \quad \mathrm{Re}\{s\}$$

פונקציות חשובות:

$$f(t) = u(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = e^{-at}u(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$f(t) = \delta(t) \qquad F(s) = 1$$

תכונות של התמרת לפלס:

ליניאריות:

$$\mathrm{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$$

$$\mathrm{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$$

$$\mathrm{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(t) + bF_2(s)$$

$a,\ b$ **קבועים**

תכונות של התמרת לפלס:

לינאריות: דוגמא לשימוש בלינאריות

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L} \qquad e^{-at} \Rightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\right\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

פונקציות חשובות:

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

תכונות של התמרת לפלס:

בהינתן:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

מתיחה/כיווץ בזמן:
scaling

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

הוכחה

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_{t=0^-}^{\infty} f(at)e^{-st}dt$$

$$at \Rightarrow t'$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t')e^{-s\frac{t'}{a}}\frac{dt'}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

תכונות של התמרת לפלס:

$$|a|>1$$

כיווץ בזמן

מתיחה במישור לפלס

$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

מתיחה בזמן

כיווץ במישור לפלס

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\}=aF(as)$$

תכונות של התמרת לפלס:

בהינתן:
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

הזזה בזמן:
$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)u(t-\tau)\} = e^{-s\tau}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)u(t-\tau)\} = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt$$

$$t-\tau \Rightarrow t'$$

$$\int_{t=0^-}^{\infty} f(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st}dt = \int_{t=0^-}^{\infty} f(t')u(t')e^{-s(t'+\tau)}dt'$$

$$\int_{t=0^-}^{\infty} f(t')u(t')e^{-s(t'+\tau)}dt' = e^{-s\tau}F(s)$$

דוגמא:

$$\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)u(t)\right\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left[\omega(t-\tau)\right]u(t-\tau)\right\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}e^{-\tau s}$$

תכונות של התמרת לפלס:

בהינתן:

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s)$$

הזזה במישור לפלס:

$$\mathrm{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

$$\mathrm{L}\{e^{-at} f(t)\} = \int_{t=0^-}^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt$$

$$\int_{t=0^-}^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt = F(s+a)$$

דוגמא:

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\cos(\omega t)\right\}=\frac{(s+a)}{(s+a)^{2}+\omega^{2}}$$

תכונות של התמרת לפלס:

בהינתן: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

גזירה בזמן: $\mathcal{L}\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$

$$\int_{t=0^-}^{\infty} f'(t)g(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{t=0^-}^{\infty} f(t)g'(t)dt$$

$$\int_{t=0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-s)e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$$

תכונות של התמרת לפלס:

גזירה בזמן:

$$F_1(s) = sF(s) - f(0^-)$$

טרנספורם לפלס של הנגזרת הראשונה

$$F_2(s) = sF_1(s) - f'(0^-)$$

טרנספורם לפלס של הנגזרת השנייה

נגזרת שנייה:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2\left[f(t)\right]}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

נגזרת שלישית:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3\left[f(t)\right]}{dt^3}\right\} = s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$$

תכונות של התמרת לפלס:

נגזרת שלישית:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3\left[f(t)\right]}{dt^3}\right\} = s^3F(s) - s^2 f\left(0^-\right) - sf'\left(0^-\right) - f''\left(0^-\right)$$

נגזרת מסדר N:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n\left[f(t)\right]}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^k\left(0^-\right)$$

תכונות של התמרת לפלס:

בהינתן: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

נגזרת במישור לפלס: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_{0^-}^{\infty} (-t)f(t)e^{-st}dt$$

$$\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{-tf(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

תכונות של התמרת לפלס:

נגזרת במישור לפלס:

$$\mathrm{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\mathrm{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

דוגמא:

נגזרת במישור לפלס:

$$\mathcal{L}\left\{tf(t)\right\} = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\left\{te^{-at}\right\}$$

תכונות של התמרת לפלס:

בהינתן:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

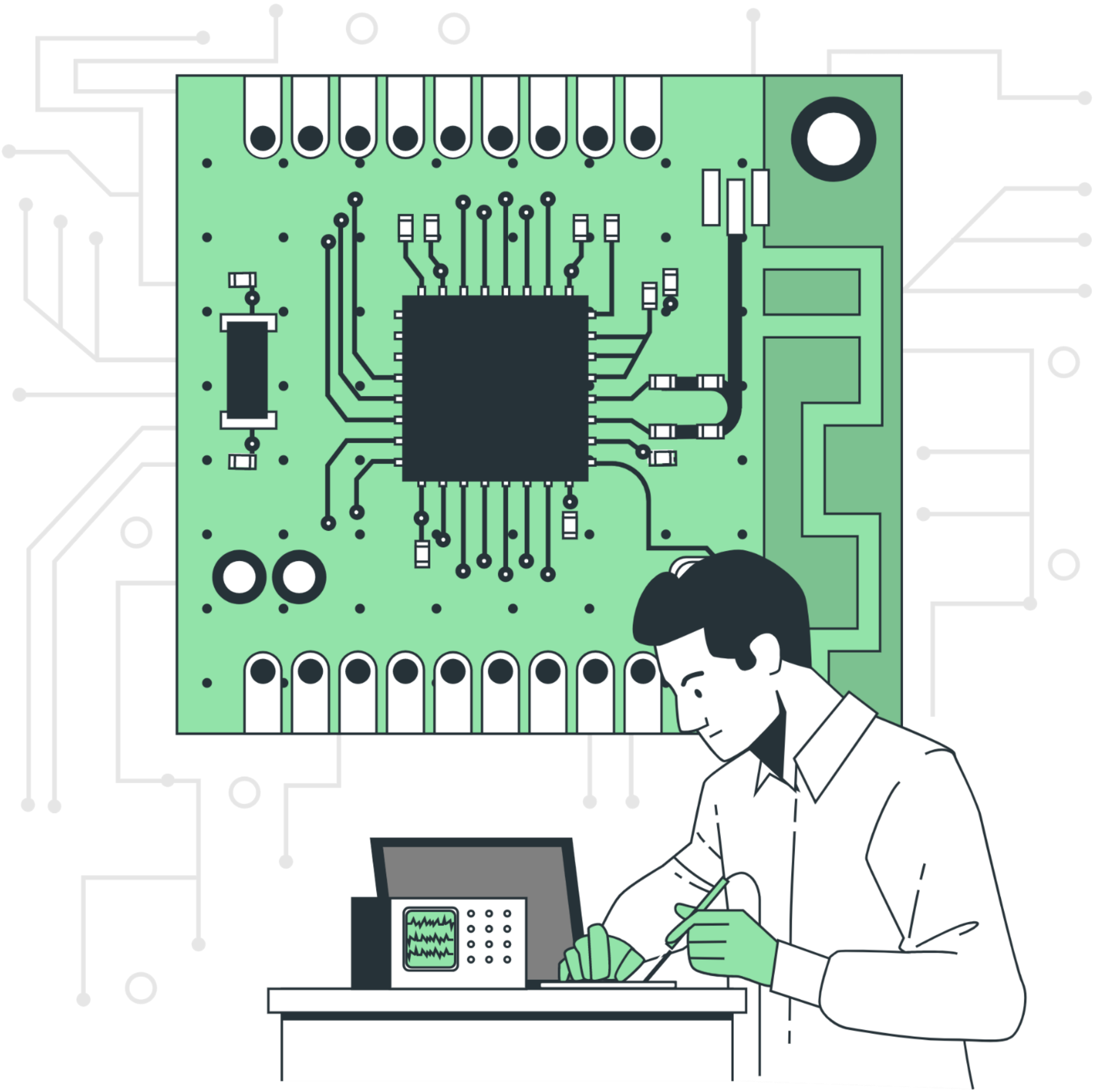
אינטגרציה בזמן:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right]e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right\} = \left[\int_{0^-}^{t} f(t')\,dt'\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$



מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 5 : התמרת (טרנספורם) לפלס

מקטע 5.2 : התמרת לפלס הפוכה

התמרות חשובות

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

תכונות התמרת לפלס

$f(t)$	$F(s)$
$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF(s)+bF(s)$
$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
$f(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0^-)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$
$f^n(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^k(0^-)$
$tf(t)$	$-dF(s)/ds$
$t^n f(t)$	$(-1)^n d^nF(s)/ds^n$
$\int_0^t f(t')dt'$	$(1/s)F(s)$

דוגמא

$$f(t)=\delta(t)+e^{-3t}u(t)$$

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

דוגמא

$$f(t) = \delta(t) + e^{-3t}u(t)$$

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s+3}$$

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s+3} = \frac{s+4}{s+3}$$

תכונה נוספת

נגזרת במישור לפלס:

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

וכש-

$$f(t) = u(t)$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n u(t)\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

התמרת לפלס הפוכה

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$F(s)=A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

האפסים של פולינום המונה מכונים "אפסים": $-z_m$

האפסים של פולינום המכנה מכונים "קטבים": $-p_n$

חלוקה לשברים חלקיים

1. סדר המונה גדול או שווה לסדר המכנה, כלומר $m \geq n$
2. כל הקטבים שונים זה מזה
3. חלק מהקטבים בעלי ריבוי
4. קטבים מרוכבים
5. אקספוננט (או פונקציה אחרת) במונה

סדר המונה גדול או שווה לסדר המכנה

$$F(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

$$F(s) = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0} \qquad m \geq n$$

פתרון: נעשה חלוקת פולינומים

דוגמא

$$F(s)=\frac{3s^2+6s-1}{s^2+4s-4}$$

$$\begin{array}{l|l} \overline{3s^2+6s-1} & s^2+4s-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & \\ \overline{3s^2+6s-1} & s^2+4s-4 \\ \underline{3s^2+12s-12} & \\ -6s+11 & \end{array}$$

$$F(s)=3+\frac{-6s+11}{s^2+4s-4}$$

כל הקטבים שונים זה מזה

$$F(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} \qquad m < n$$

$$F(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2}\dots\frac{A_n}{s+p_n}$$

$$A_k = (s+p_k)F(s)\Big|_{s=-p_k} \qquad k = 1 \,..\, n$$

דוגמא

$$F(s) = \frac{-6s+11}{s^2+3s+2}$$

$$F(s) = \frac{-6s+11}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{-6s+11}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

$$A_1 = (s+1)\frac{-6s+11}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-1} = \frac{17}{1} = 17$$

$$A_2 = (s+2)\frac{-6s+11}{(s+1)(s+2)}\bigg|_{s=-2} = \frac{23}{-1} = -23$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{-6s+11}{s^2+3s+2}$$

$$F(s)=\frac{17}{s+1}+\frac{-23}{s+2}$$

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

דוגמא

$$F(s)=\frac{-6s+11}{s^2+3s+2}$$

$$F(s)=\frac{17}{s+1}+\frac{-23}{s+2}$$

$$f(t)=17e^{-t}u(t)-23e^{-2t}u(t)$$

קטבים עם ריבוי

$$F(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_{n-r})(s+q)^r} \qquad m<n$$

$$F(s) = F_1(s) + \frac{B_1}{s+q} + \frac{B_2}{(s+q)^2} \ldots \frac{B_r}{(s+q)^r}$$

$$B_r = (s+q)^r F(s)\Big|_{s=-q}$$

$$B_{r-m} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{ds^m}\left[(s+q)^r F(s)\right]\Big|_{s=-q} \qquad m = 1\,..\,r-1$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{3s^2+29s+72}{(s+3)(s+5)^2}$$

$$r=2$$

$$F(s)=\frac{A}{s+3}+\frac{B_1}{s+5}+\frac{B_2}{(s+5)^2}$$

$$A_k=(s+p_k)F(s)\Big|_{s=-p_k} \qquad k=1\,..\,n$$

$$A=\frac{3s^2+29s+72}{(s+5)^2}\Bigg|_{s=-3}=3$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{3s^2+29s+72}{(s+3)(s+5)^2}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+3}+\frac{B_1}{s+5}+\frac{B_2}{(s+5)^2}$$

$$B_r=(s+q)^r F(s)\Big|_{s=-q}$$

$$B_2=\frac{3s^2+29s+72}{(s+3)}\Bigg|_{s=-5}=\frac{75-145+72}{-2}=-1$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{3s^2+29s+72}{(s+3)(s+5)^2}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+3}+\frac{B_1}{s+5}+\frac{-1}{(s+5)^2}$$

$$B_{r-m}=\frac{1}{m!}\frac{d^m}{ds^m}\left[(s+q)^r F(s)\right]\Big|_{s=-q} \qquad m=1\,..\,r-1$$

$$B_1=\frac{d}{ds}\frac{3s^2+29s+72}{(s+3)}\Bigg|_{s=-5}=$$

$$=\frac{(6s+29)(s+3)-(3s^2+29s+72)}{(s+3)^2}\Bigg|_{s=-5}=0$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{3s^2+29s+72}{(s+3)(s+5)^2}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+3}+\frac{0}{s+5}+\frac{-1}{(s+5)^2}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+3}-\frac{1}{(s+5)^2}$$

$$f(t)=3e^{-3t}u(t)-te^{-5t}u(t)$$

קטבים מרוכבים

$$m < n$$

$$F(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_{n-1})(s+p_{n-1}^*)}$$

$$F(s) = \frac{A_1}{s+p_1} + \frac{A_2}{s+p_2} \ldots \frac{A_{n-1}}{s+p_{n-1}} + \frac{A_n}{s+p_n^*}$$

$$A_k = (s+p_k)F(s)\Big|_{s=-p_k} \qquad k = 1\,..\,n$$

קטבים מרוכבים

$m < n$

$$F(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_{n-1})(s+p_{n-1}^*)}$$

$$F(s) = A\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s^2+as+b)}$$

$$F(s) = F_1(s) + \frac{B_1 s + B_0}{s^2+as+b}$$

קטבים מרוכבים

$$F(s) = F_1(s) + \frac{B_1 s + B_0}{s^2 + as + b}$$

$$F(s) = F_1(s) + \frac{C_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C_0\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$f(t) = f_1(t) + C_1 e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t) + \\ + C_0 e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)$$

קטבים מרוכבים

איך נמצא את α ו- β ?

$$F(s) = F_1(s) + \frac{B_1 s + B_0}{s^2 + as + b}$$

$$F(s) = F_1(s) + \frac{C_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C_0\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$s^2 + as + b = (s+\alpha)^2 + \beta^2$$

$$\alpha = \frac{a}{2}$$

$$\beta = \left(b - \frac{a^2}{4}\right)^{1/2}$$

קטבים מרוכבים

איך נמצא את C_0 ו-C_1?

$$F(s)=F_1(s)+\frac{B_1 s+B_0}{s^2+as+b}$$

$$F(s)=F_1(s)+\frac{C_1(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{C_0\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

פתרון – נייצר שתי משוואות על ידי הצבת שני ערכי S שונים.

דוגמא

$$F(s)=\frac{5s^2+31}{(s+2)\left(s^2+2s+17\right)}$$

$$F(s)=\frac{A}{s+2}+\frac{B_1 s+B_0}{s^2+2s+17}$$

$$A_k=(s+p_k)F(s)\Big|_{s=-p_k} \qquad k=1\,..\,n$$

$$A=\left.\frac{5s^2+31}{\left(s^2+2s+17\right)}\right|_{s=-2}=3$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{5s^2+31}{(s+2)(s^2+2s+17)}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{B_1 s+B_0}{s^2+2s+17}$$

$$s^2+2s+17=(s+\alpha)^2+\beta^2 \qquad \alpha=\frac{a}{2}=1$$

$$\beta=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)^{1/2}=4$$

דוגמא

$$F\left(s\right)=\frac{5s^2+31}{\left(s+2\right)\left(s^2+2s+17\right)}$$

$$F\left(s\right)=\frac{3}{s+2}+\frac{B_1s+B_0}{s^2+2s+17}$$

$$F\left(s\right)=\frac{3}{s+2}+\frac{C_1\left(s+1\right)}{\left(s+1\right)^2+16}+\frac{C_0 4}{\left(s+1\right)^2+16}$$

נציב $s=-1$

$$\left.\frac{5s^2+31}{\left(s+2\right)\left(s^2+2s+17\right)}\right|_{s=-1}=\frac{36}{16}$$

$$\left.\frac{3}{s+2}+\frac{C_1\left(s+1\right)}{\left(s+1\right)^2+16}+\frac{C_0 4}{\left(s+1\right)^2+16}\right|_{s=-1}=3+\frac{C_0}{4}$$

דוגמא

$$F(s)=\frac{5s^2+31}{(s+2)(s^2+2s+17)}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{B_1 s+B_0}{s^2+2s+17}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{C_1(s+1)}{(s+1)^2+16}+\frac{C_0 4}{(s+1)^2+16}$$

$$C_0=-3$$

$$C_1=2$$

נציב $s=0$

דוגמא

$$F(s)=\frac{5s^2+31}{(s+2)(s^2+2s+17)}$$

$$F(s)=\frac{3}{s+2}+\frac{B_1s+B_0}{s^2+2s+17}$$

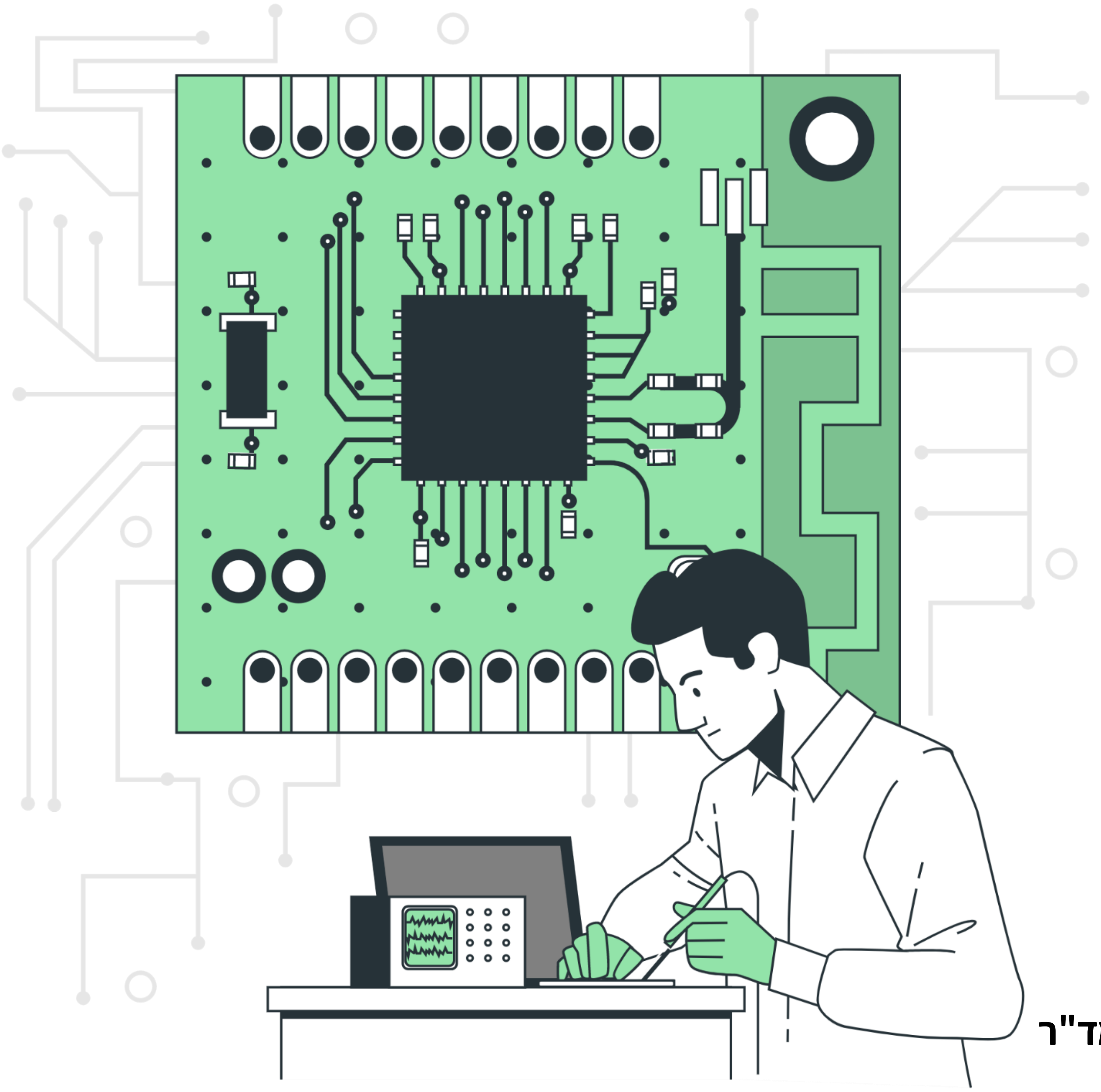
$$F(s)=\frac{3}{s+2}+2\frac{(s+1)}{(s+1)^2+16}-3\frac{4}{(s+1)^2+16}$$

$$f(t)=3e^{-2t}+2e^{-t}\cos(4t)-3e^{-t}\sin(4t)$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל



יחידה 5 : התמרת (טרנספורם) לפלס

מקטע 5.3 : סיום התמרת לפלס הפוכה ופתרון מד"ר

התמרת לפלס הפוכה - פרוק לשברים חלקיים

1. סדר המונה גדול או שווה לסדר המכנה, כלומר $m \geq n$
2. כל הקטבים שונים זה מזה
3. חלק מהקטבים בעלי ריבוי
4. קטבים מרוכבים
5. $\boxed{\text{אקספוננט (או פונקציה אחרת במונה)}}$

תכונות התמרת לפלס

$f(t)$	$F(s)$
$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF(s)+bF(s)$
$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
$f(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-\tau s}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0^-)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)$
$f^n(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^k(0^-)$
$tf(t)$	$-dF(s)/ds$
$t^nf(t)$	$(-1)^n d^nF(s)/ds^n$
$\int_0^t f(t')dt'$	$(1/s)F(s)$

התמרת לפלס הפוכה – אקספוננט במונה

$$F\left(s\right)=\frac{s\left(1+e^{-2.5s}-e^{-1.5s}\right)+2e^{-2.5s}}{s^{2}+3s+2}$$

$$F\left(s\right)=\frac{s+\left(s+2\right)e^{-2.5s}-se^{-1.5s}}{s^{2}+3s+2}$$

$$F\left(s\right)=\frac{s}{s^{2}+3s+2}+\frac{s+2}{s^{2}+3s+2}e^{-2.5s}-\frac{s}{s^{2}+3s+2}e^{-1.5s}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

התמרת לפלס הפוכה – אקספוננט במונה

$$F\left(s\right)=\frac{s}{s^2+3s+2}+\frac{s+2}{s^2+3s+2}e^{-2.5s}-\frac{s}{s^2+3s+2}e^{-1.5s}$$

$$\frac{s}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1} \Rightarrow \left[2e^{-2t}-e^{-t}\right]u\left(t\right)$$

$$-\frac{s}{s^2+3s+2}e^{-1.5s} \Rightarrow \left[2e^{-2\left(t-1.5\right)}-e^{-\left(t-1.5\right)}\right]u\left(t-1.5\right)$$

נשתמש ב-

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$\delta(t)$	1
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

התמרת לפלס הפוכה – אקספוננט במונה

$$F(s) = \frac{s}{s^2+3s+2} + \frac{s+2}{s^2+3s+2}e^{-2.5s} - \frac{s}{s^2+3s+2}e^{-1.5s}$$

$$\frac{s+2}{s^2+3s+2}e^{-2.5s} = \frac{1}{s+1}e^{-2.5s} \Rightarrow e^{-(t-2.5)}u(t-2.5)$$

התמרת לפלס הפוכה – אקספוננט במונה

$$F\left(s\right)=\frac{s}{s^2+3s+2}+\frac{s+2}{s^2+3s+2}e^{-2.5s}-\frac{s}{s^2+3s+2}e^{-1.5s}$$

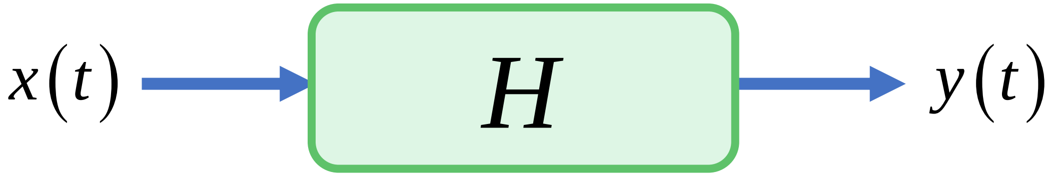
$$f\left(t\right)=\left[2e^{-2t}-e^{-t}\right]u\left(t\right)+e^{-\left(t-2.5\right)}u\left(t-2.5\right)$$

$$+\left[2e^{-2\left(t-1.5\right)}-e^{-\left(t-1.5\right)}\right]u\left(t-1.5\right)$$

פתרון מד"ר על ידי לפלס :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)$$

אגף הנעלמים | אגף המקורות



פתרון מד"ר על ידי לפלס :

$$f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad F(s)$$

$$f^{n}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{k}\left(0^{-}\right)$$

פתרון מד"ר על ידי לפלס :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)\right] = {} & a_0 Y(s) + \\
& + a_1\left[sY(s) - y_0\right] + \\
& + a_2\left[s^2 Y(s) - s y_0 - y_0^{(1)}\right] + \\
& + a_3\left[s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s y_0^{(1)} - y_0^{(2)}\right] + \\
& \vdots \\
& + a_n\left[s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - \cdots - y_0^{(n-1)}\right]
\end{aligned}
$$

פתרון מד"ר על ידי לפלס :

$$
\begin{aligned}
&+a_1\left[\qquad -y_0\right]+\\
&+a_2\left[\qquad -sy_0-y_0^{(1)}\right]+\\
&+a_3\left[\qquad -s^2y_0-sy_0^{(1)}-y_0^{(2)}\right]+\\
&\vdots\\
&+a_n\left[\qquad -s^{n-1}y_0-\cdots-y_0^{(n-1)}\right]
\end{aligned}
$$

פולינום תנאי התחלה

פתרון מד"ר על ידי לפלס :

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)\right] = D(s)Y(s) - P_i(s)$$

הפולינום האופייני

פולינום תנאי התחלה

$$P_i(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_0^{(k-1)} + s\sum_{k=2}^{n} a_k y_0^{(k-2)} + \cdots$$

$$\cdots + s^{n-1}\sum_{k=n}^{n} a_k y_0^{(k-n)}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

פתרון מד"ר על ידי לפלס :

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t)\right] = \underbrace{\left[b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m\right]}_{N(s)} X(s)$$

$$D(s)Y(s) - P_i(s) = N(s)X(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}X(s)}_{\text{ZSR}} + \underbrace{\frac{P_i(s)}{D(s)}}_{\text{ZIR}}$$

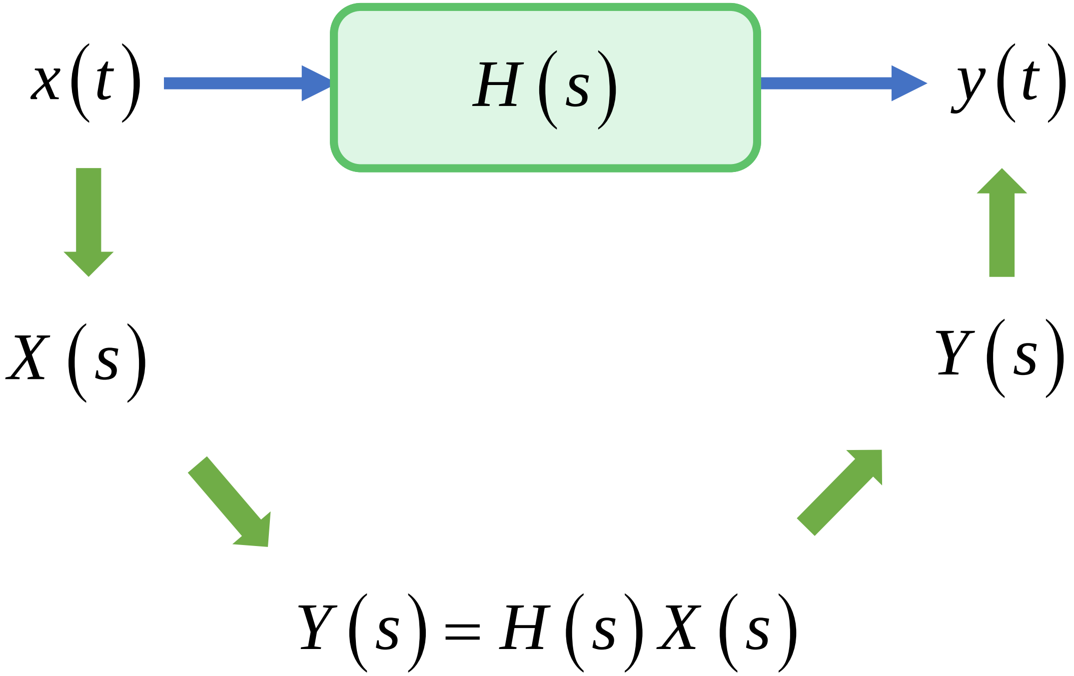
פונקציית התמסורת של המערכת

$$Y(s)=\underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}X(s)}_{\text{ZSR}}+\underbrace{\frac{P_i(s)}{D(s)}}_{\text{ZIR}}$$

עבור תנאי התחלה מאופסים (ZSR):

$$\frac{OUTPUT}{INPUT}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}=H(s)$$

פונקציית התמסורת של מערכת



תגובה להלם

$$
\begin{tikzcd}
x(t)=\delta(t) \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{H(s) \Leftrightarrow h(t)} \arrow[r] & h(t) \\
X(s)=1 \arrow[dr] & & H(s) \arrow[u] \\
& Y(s)=H(s) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

פונקציית התמסורת היא התמרת
לפלס של התגובה להלם של המערכת

פונקציית התמסורת והתגובה להלם

$$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow h(t)*x(t)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow H(s)X(s)$$

דוגמא

מערכת מסוימת מיוצגת על ידי המד"ר:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$$

1. **מצא את פונקציית התמסורת של המערכת**
2. **מצא את התגובה להלם שלה**

פונקציית התמסורת:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$$

$$s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=X(s)$$

$$\underbrace{\left[s^2+5s+6\right]}_{D(s)}Y(s)=X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+5s+6}$$

התגובה להלם:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+5s+6}$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}=\frac{1}{s+2}+\frac{-1}{s+3}$$

$$h(t)=\left[e^{-2t}-e^{-3t}\right]u(t)$$

דוגמא

עתה נתונים גם תנאי התחלה:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$$
$$y(0)=1$$
$$y'(0)=-3$$

1. **מצא את התגובה הכוללת של המערכת עבור** $x(t)=\delta(t)$
2. **מצא את התגובה ל-** $x(t)=u(t)$

דוגמא

עתה נתונים גם תנאי התחלה:

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$$

$$y''(t)\Leftrightarrow s^2Y(s)-sy_0-y_0'$$

$$y'(t)\Leftrightarrow sY(s)-y_0$$

$$\left[s^2Y(s)-sy_0-y_0'\right]+5\left[sY(s)-y_0\right]+6Y(s)=X(s)$$

דוגמא

$$\left[s^2Y(s)-sy_0-y_0'\right]+5\left[sY(s)-y_0\right]+6Y(s)=X(s)$$

$$\left[s^2+5s+6\right]Y(s)-\left[sy_0+5y_0+y_0'\right]=X(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{sy_0+5y_0+y_0'}{s^2+5s+6}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{s+2}{s^2+5s+6}$$

דוגמא

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{s+2}{s^2+5s+6}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{1}{s+3}$$

$$y(t)=\underbrace{\left[e^{-2t}-e^{-3t}\right]u(t)}_{\text{ZSR}}+\underbrace{e^{-3t}u(t)}_{\text{ZIR}}$$

דוגמא

עתה: $x(t)=u(t)$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}X(s)+\frac{s+2}{s^2+5s+6}$$

$$X(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y_{ZSR}(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+3)}$$

דוגמא

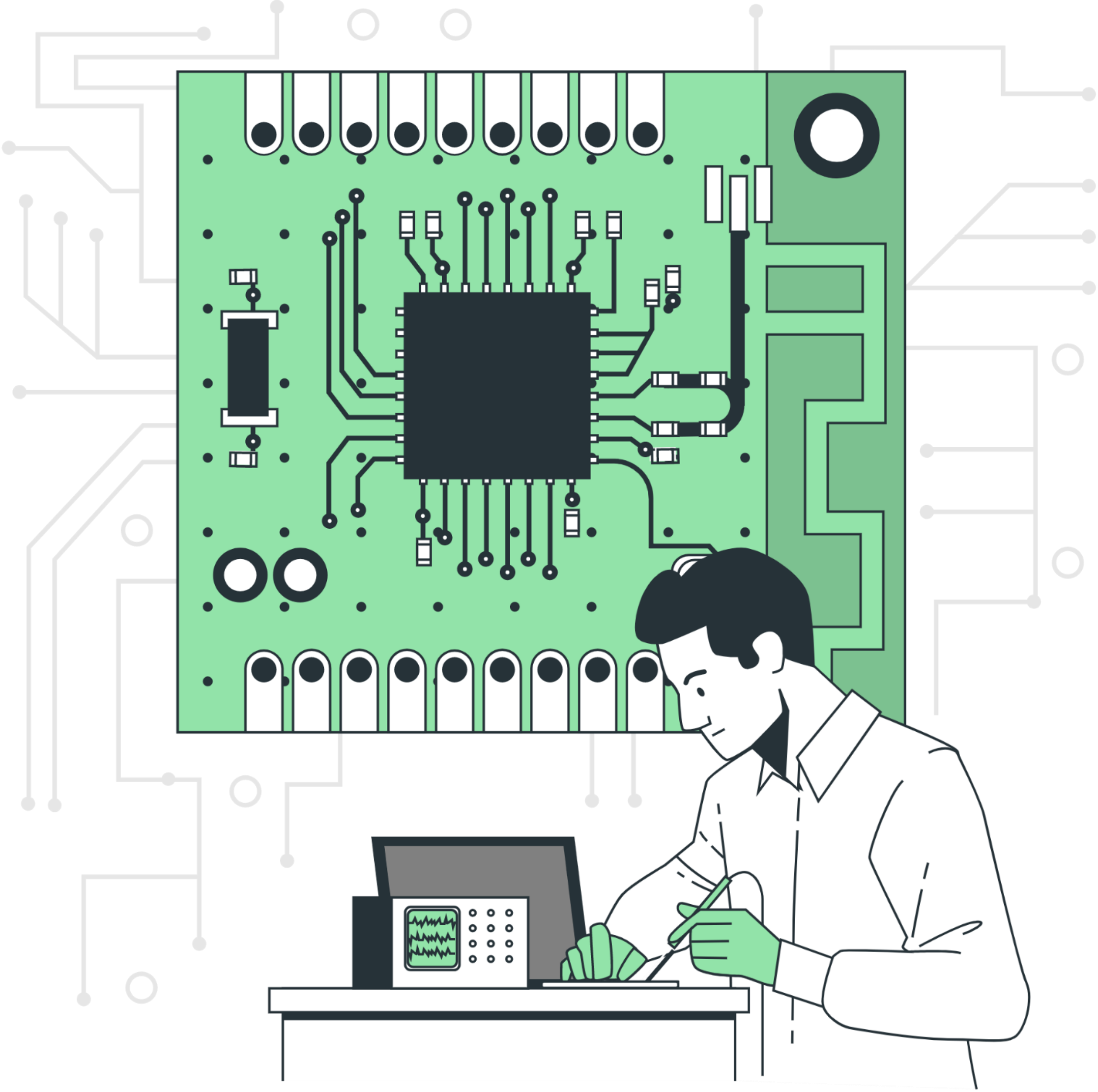
$$Y_{ZSR}(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+3)}=$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}$$

$$=\frac{1/6}{s}+\frac{-1/2}{s+2}+\frac{1/3}{s+3}$$

$$y(t)=\underbrace{\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right]u(t)}_{\text{ZSR}}+\underbrace{e^{-3t}u(t)}_{\text{ZIR}}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



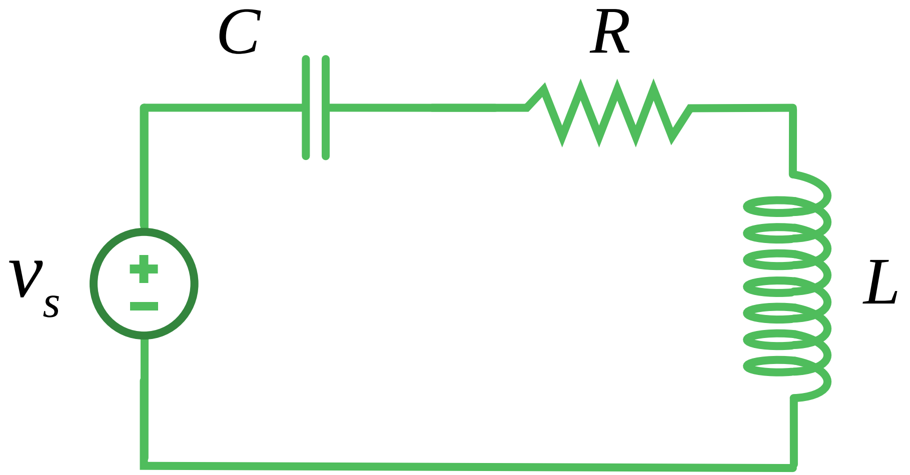
מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 5 : התמרת (טרנספורם) לפלס

מקטע 5.4 : פתרון מעגלים ישירות

נתחיל בדוגמא

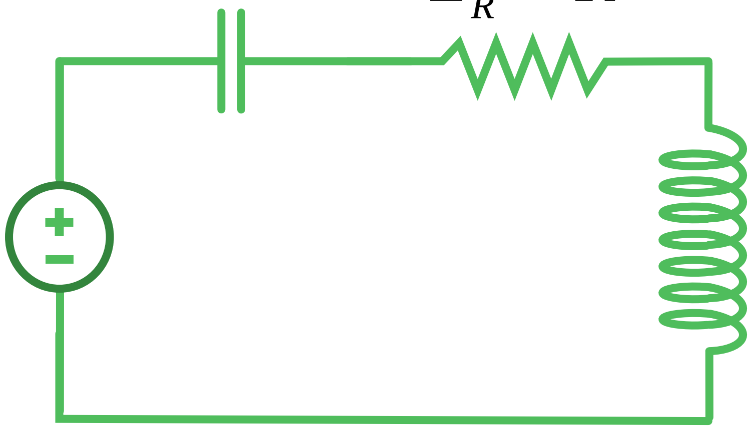


$$v_C(0) = v_0^C \qquad i_L(0) = i_0^L$$

ראינו שעבור מקור AC

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_R = R$$



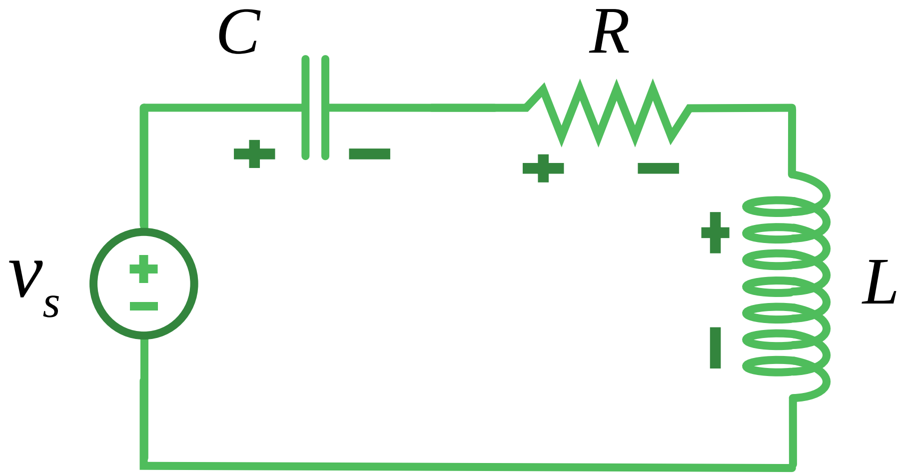
V_s

$$Z_L = j\omega L$$

$$v_C(0) = v_0^C \qquad i_L(0) = i_0^L$$

לא מעניינים

נתחיל בדוגמא



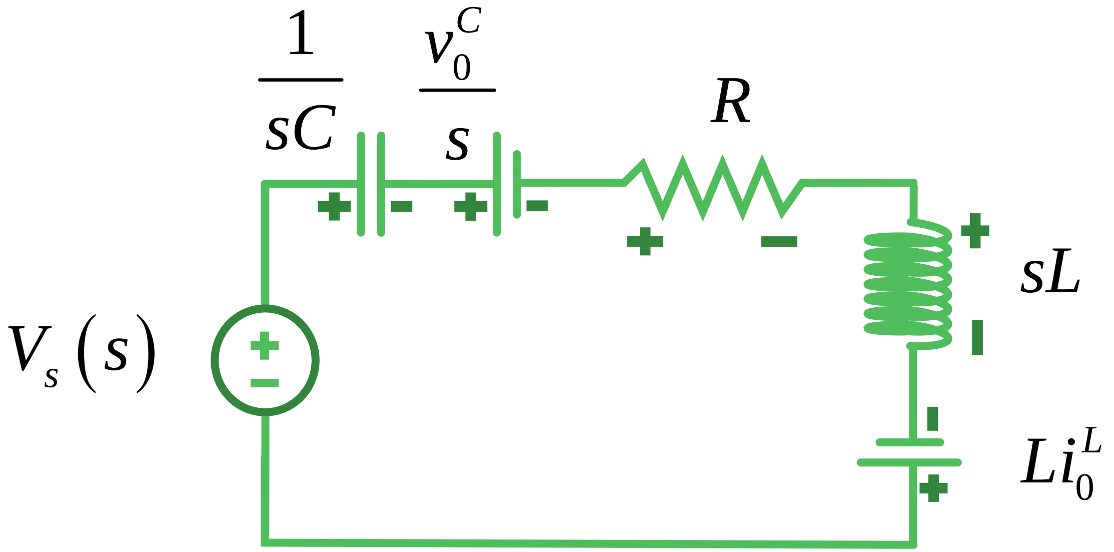
$$v_C(0) = v_0^C \qquad i_L(0) = i_0^L$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + v_0^C = v_s$$

KVL

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+v_0^C=v_s$$

$$RI(s)+L\left[sI(s)-i_0^L\right]+\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s)+\frac{v_0^C}{s}=V_s(s)$$



נמצא את הזרם בייצוג לפלס

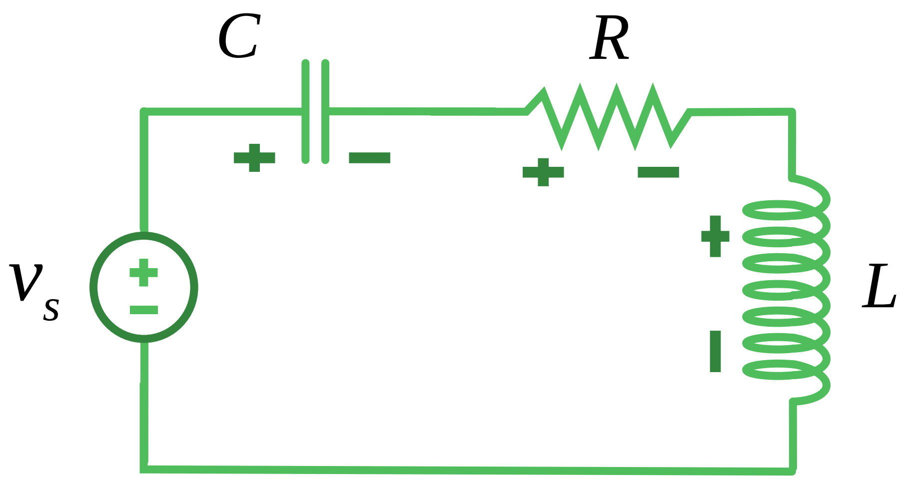
$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+v_0^C=v_s$$

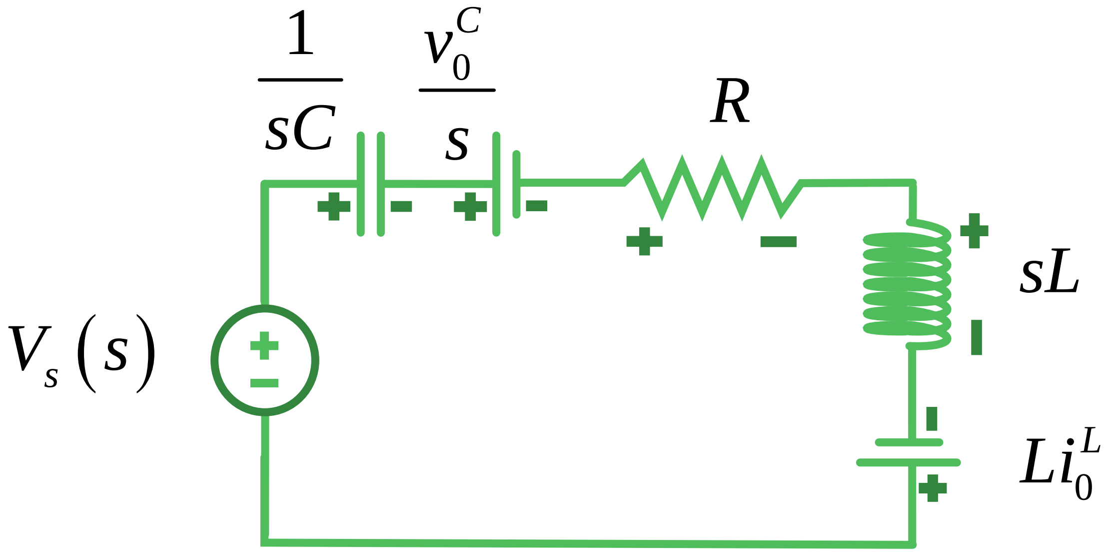
$$RI(s)+L\left[sI(s)-i_0^L\right]+\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s)+\frac{v_0^C}{s}=V_s(s)$$

$$\left[R+Ls+\frac{1}{Cs}\right]I(s)+\frac{v_0^C}{s}-Li_0^L=V_s(s)$$

$$I(s)=\frac{V_s(s)}{R+Ls+\frac{1}{Cs}}-\frac{\frac{v_0^C}{s}-Li_0^L}{R+Ls+\frac{1}{Cs}}$$

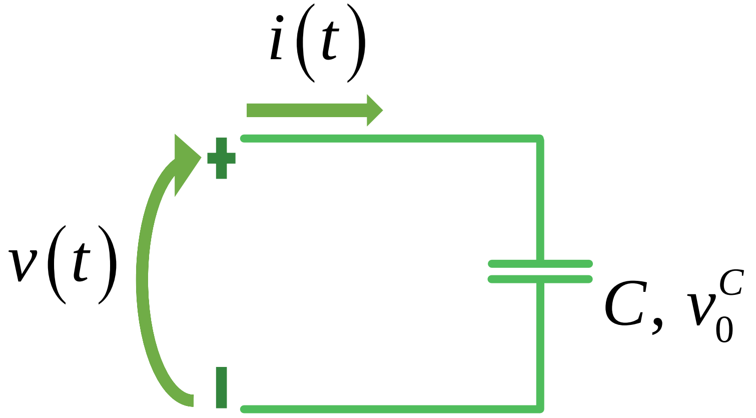
המעגל בייצוג לפלס



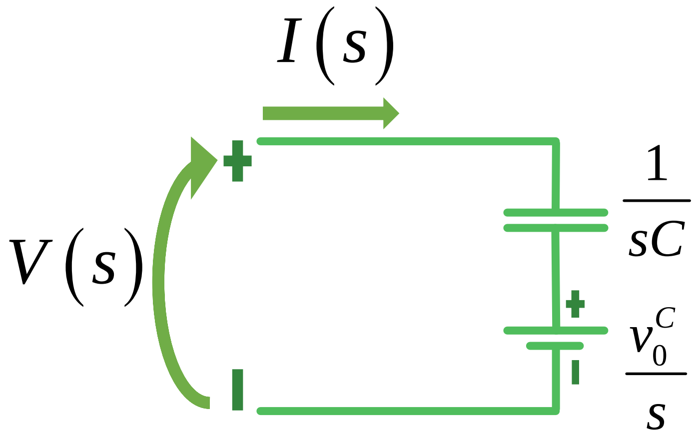


ייצוג קבל במישור לפלס

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt+v_0^C$$

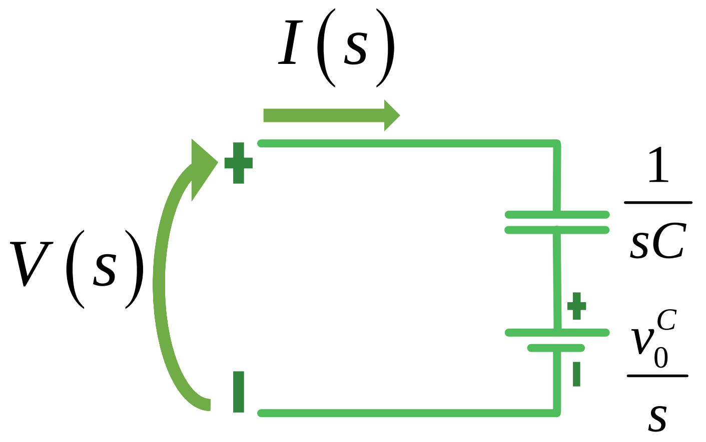


$$V(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v_0^C}{s}$$

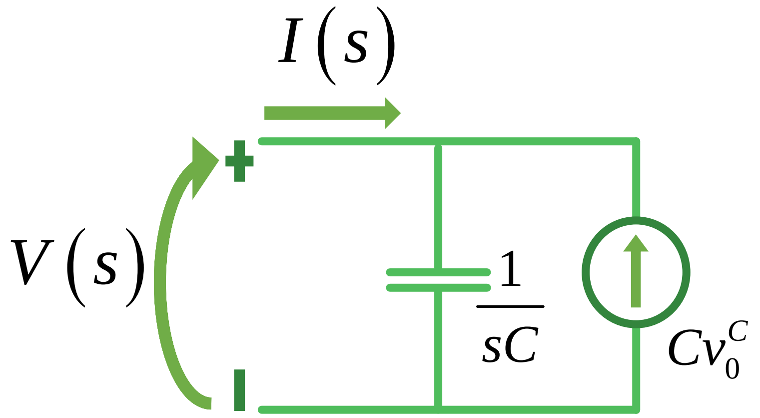


ייצוג שקול

$$V(s)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v_0^C}{s}$$

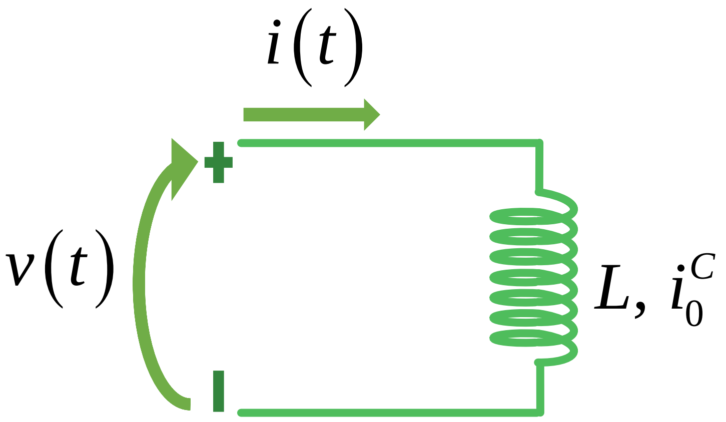


$$I(s)=sCV(s)-Cv_0^C$$

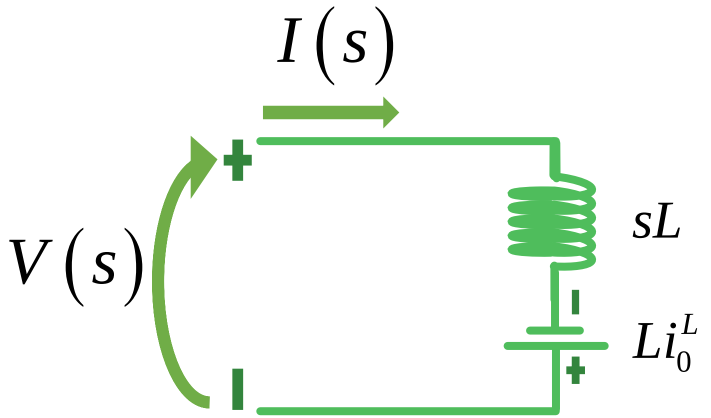


ייצוג סליל במישור לפלס

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

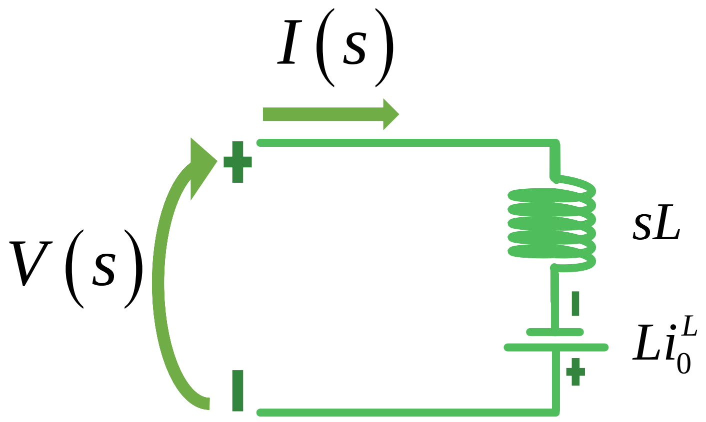


$$V(s) = sLI(s) - Li_0^L$$

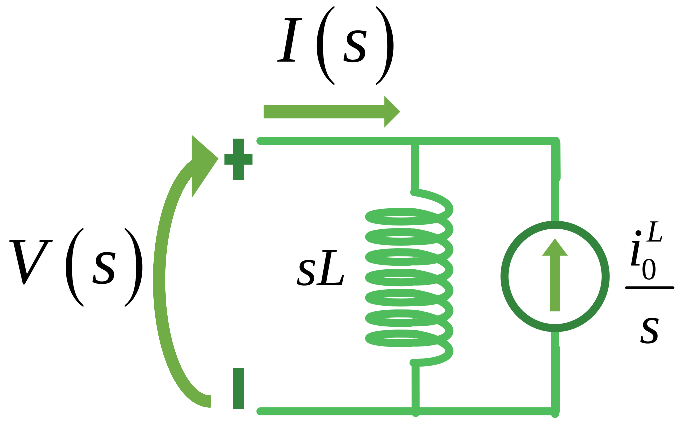


ייצוג סליל שקול

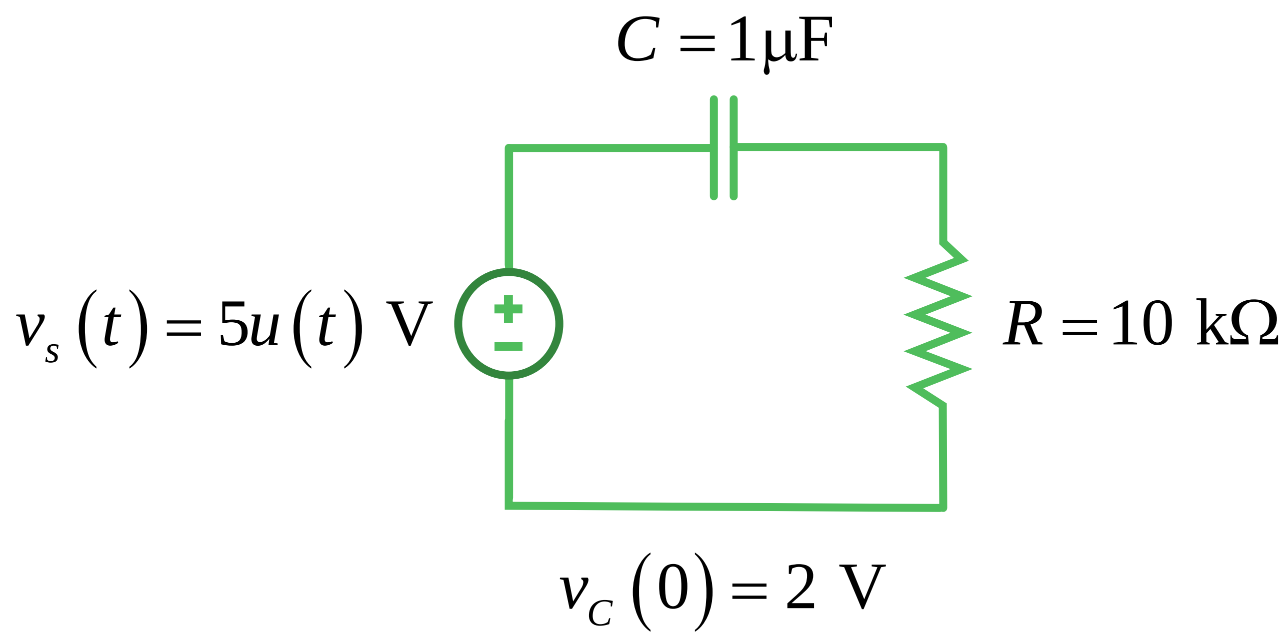
$$V(s) = sLI(s) - Li_0^L$$



$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i_0^L}{s}$$

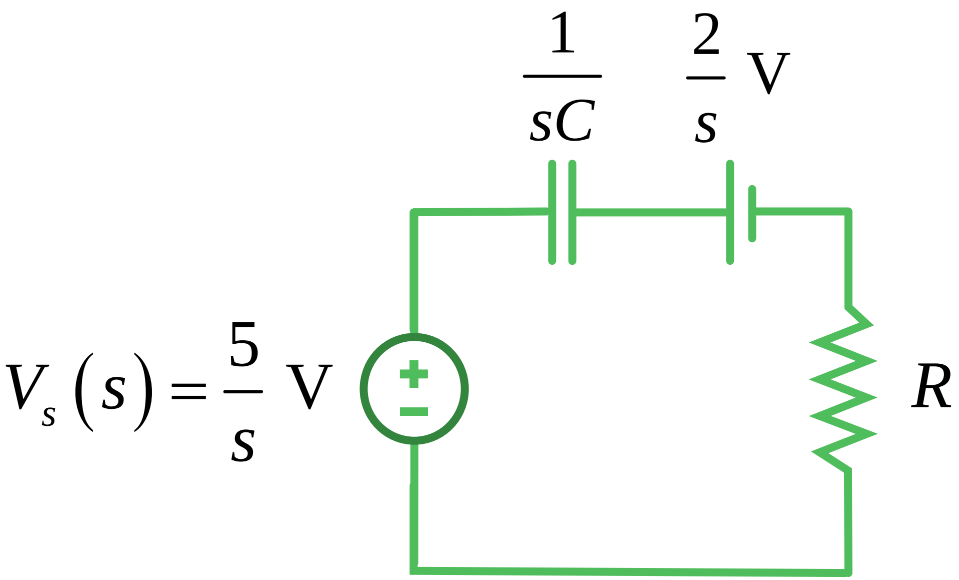


פתרון מעגל - דוגמא

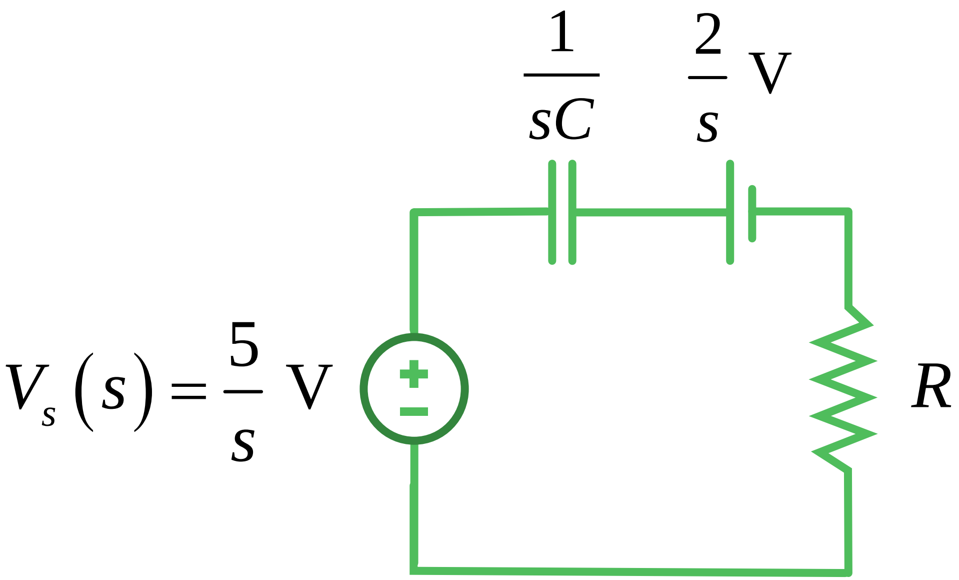


$$\tau = RC = 10 \cdot 10^3 \times 1 \cdot 10^{-6} = 10^{-2}\ \text{sec}$$

נעבור לייצוג לפלס



נרשום משוואת KVL



$$\frac{1}{sC} I(s) + \frac{2}{s} + RI(s) = \frac{5}{s}$$

נפתור ל- I

$$\frac{1}{sC}I(s)+\frac{2}{s}+RI(s)=\frac{5}{s}$$

$$I(s)=\frac{5/s}{1/sC+R}-\frac{2/s}{1/sC+R}$$

$$I(s)=\frac{3/s}{1/sC+R}=\frac{3/R}{1/RC+s}$$

$$i(t)=\frac{3}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=3\cdot10^{-4}e^{-\frac{t}{10^{-2}}}\ \text{A}$$

נפתור למתח הקבל

$$\frac{1}{sC}I(s)+\frac{2}{s}+RI(s)=\frac{5}{s}$$

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$I(s)=C\left[sV(s)-v_0^C\right]$$

$$\left(\frac{1}{sC}+R\right)\left[sCV(s)-Cv_0^C\right]+\frac{2}{s}=\frac{5}{s}$$

$$V(s)=\frac{3/s}{1+sRC}+\frac{v_0^C}{s}$$

נפתור למתח הקבל

$$V(s)=\frac{3/s}{1+sRC}+\frac{v_0^C}{s}$$

$$V(s)=\frac{3/RC}{s(1/RC+s)}+\frac{v_0^C}{s}$$

$$V(s)=\frac{A}{1/RC+s}+\frac{B}{s}+\frac{v_0^C}{s}$$

$$B=3$$

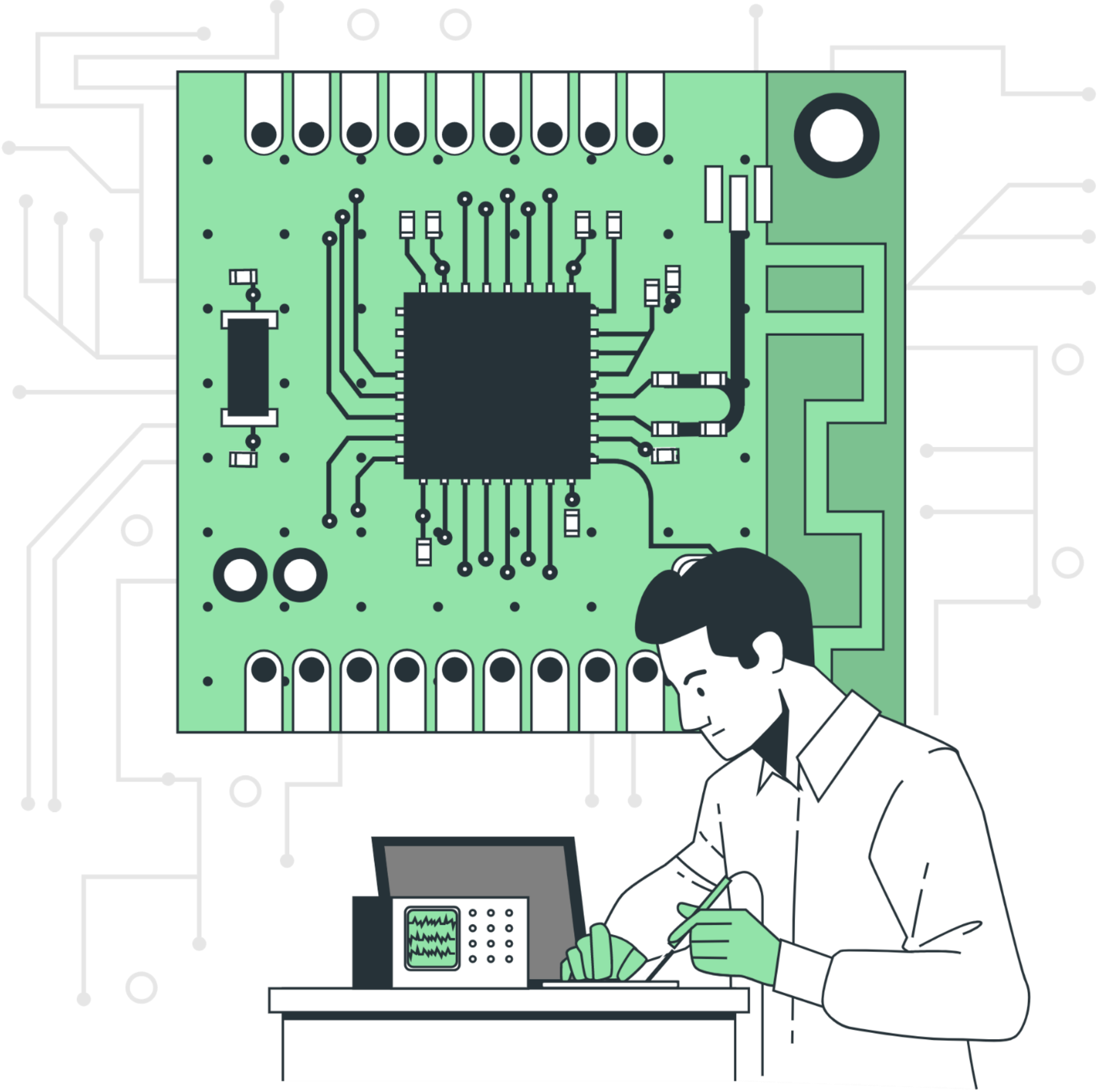
$$A=-3$$

נפתור למתח הקבל

$$V(s)=\frac{-3}{1/\tau+s}+\frac{3}{s}+\frac{2}{s}$$

$$v(t)=-3e^{-\frac{t}{\tau}}+5$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



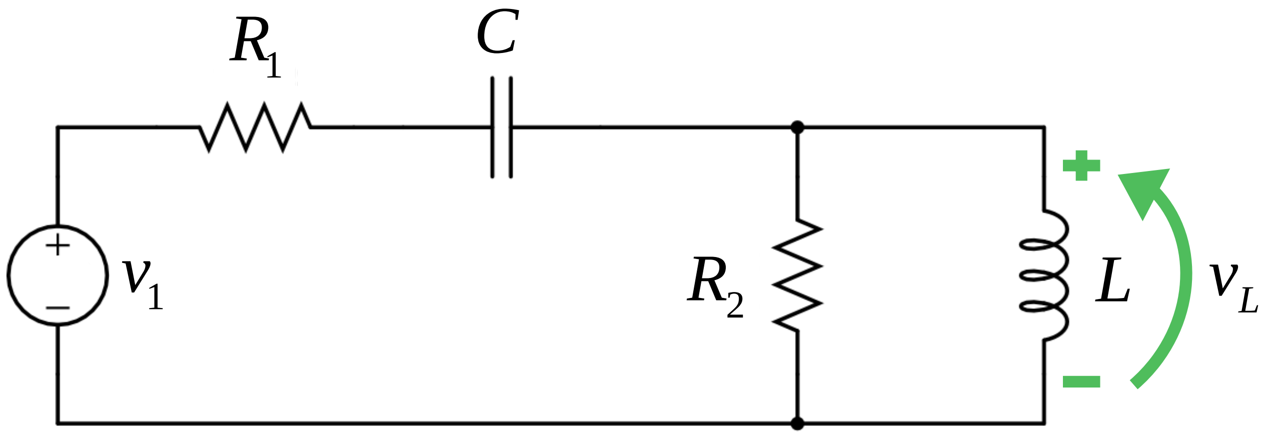
מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 5 : התמרת (טרנספורם) לפלס

מקטע 5.5 : פתרון מעגלים ישירות המשך וסיכום

דוגמא

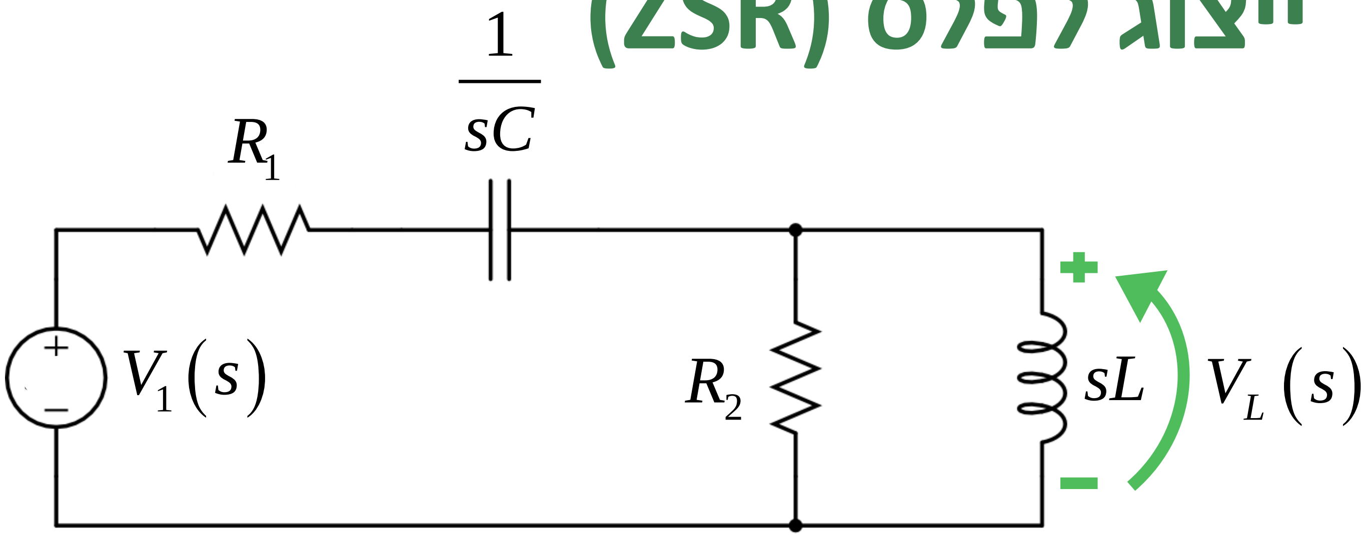


המעגל שלפנינו מייצג מערכת שהכניסה שלה זה $\mathbf{V_1}$
והמוצא שלה הוא מתח הסליל $\mathbf{V_L}$:

1. מצא את פונקציית התמסורת של המערכת
2. מצא את התגובה להלם של המערכת אם נתון ש-

$$R_1 = 90\Omega \quad R_2 = 10\Omega \quad C = 1\,\mathrm{mF} \quad L = 500\,\mathrm{mH}$$

ייצוג לפלס (ZSR)



$$V_L(s) = \frac{R_2 \parallel sL}{R_1 + \frac{1}{sC} + \left(R_2 \parallel sL\right)} V_1(s)$$

ייצוג לפלס (ZSR)

$$V_L(s)=\frac{R_2\parallel sL}{R_1+\frac{1}{sC}+\left(R_2\parallel sL\right)}V_1(s)$$

$$H(s)=\frac{R_2\parallel sL}{R_1+\frac{1}{sC}+\left(R_2\parallel sL\right)}$$

$$H(s)=\frac{\frac{R_2Ls}{R_2+sL}}{\frac{R_1Cs+1}{sC}+\frac{R_2Ls}{R_2+sL}}$$

ייצוג לפלס (ZSR)

$$H(s)=\frac{\dfrac{R_2Ls}{R_2+sL}}{\dfrac{R_1Cs+1}{sC}+\dfrac{R_2Ls}{R_2+sL}}$$

$$H(s)=\frac{s^2}{\left(\dfrac{R_1}{R_2}+1\right)s^2+\left(\dfrac{R_1}{L}+\dfrac{1}{R_2C}\right)s+\dfrac{1}{LC}}$$

ייצוג לפלס (ZSR)

$$H(s)=\frac{s^2}{\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)s^2+\left(\frac{R_1}{L}+\frac{1}{R_2C}\right)s+\frac{1}{LC}}$$

$$H(s)=\frac{s^2}{10s^2+280s+2000}=0.1\frac{s^2}{s^2+28s+200}$$

$$H(s)=0.1\left(1-\frac{28s+200}{s^2+28s+200}\right)$$

$$s_\pm=-14\pm 2j$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

ייצוג לפלס (ZSR)

$$H(s) = 0.1\left(1 - \frac{28s + 200}{s^2 + 28s + 200}\right)$$

$$s^2 + 28s + 200 = (s+\alpha)^2 + \beta^2$$

$$\alpha = 14$$

$$\beta = 2$$

$$H(s) = 0.1\left[1 - \frac{C_1(s+14)}{(s+14)^2 + 4} - \frac{C_0 2}{(s+14)^2 + 4}\right]$$

ייצוג לפלס (ZSR)

$$H(s) = 0.1\left(1 - \frac{28s + 200}{s^2 + 28s + 200}\right)$$

$$H(s) = 0.1\left[1 - \frac{C_1(s+14)}{(s+14)^2 + 4} - \frac{C_0 2}{(s+14)^2 + 4}\right]$$

נציב: $s = 0$ $\qquad 14C_1 + 2C_0 = 200$

נציב: $s = 1$ $\qquad 15C_1 + 2C_0 = 228$

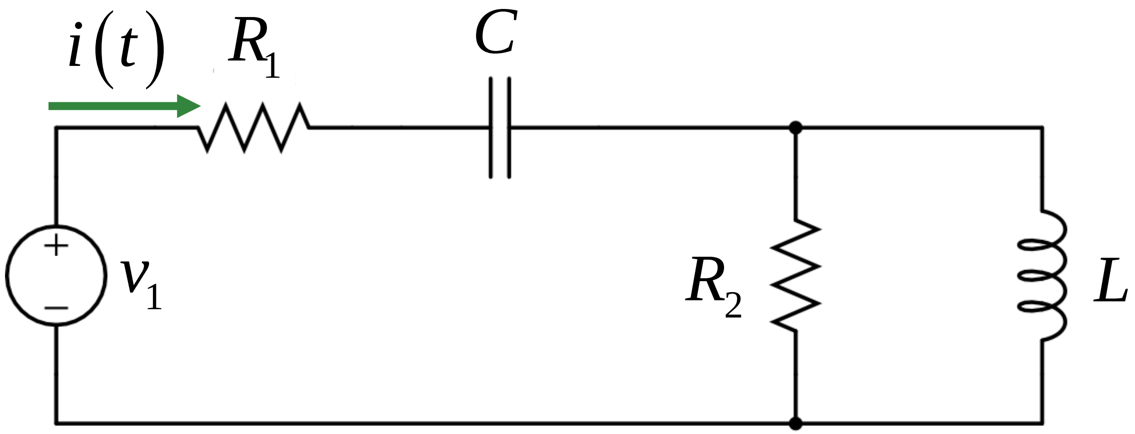
$C_1 = 28 \qquad C_0 = -96$

ייצוג לפלס (ZSR)

$$H(s)=0.1\left[1-28\frac{(s+14)}{(s+14)^2+4}+96\frac{2}{(s+14)^2+4}\right]$$

$$h(t)=0.1\delta(t)+\left[-2.8\cos(2t)+9.6\sin(2t)\right]e^{-14t}u(t)$$

דוגמא נוספת



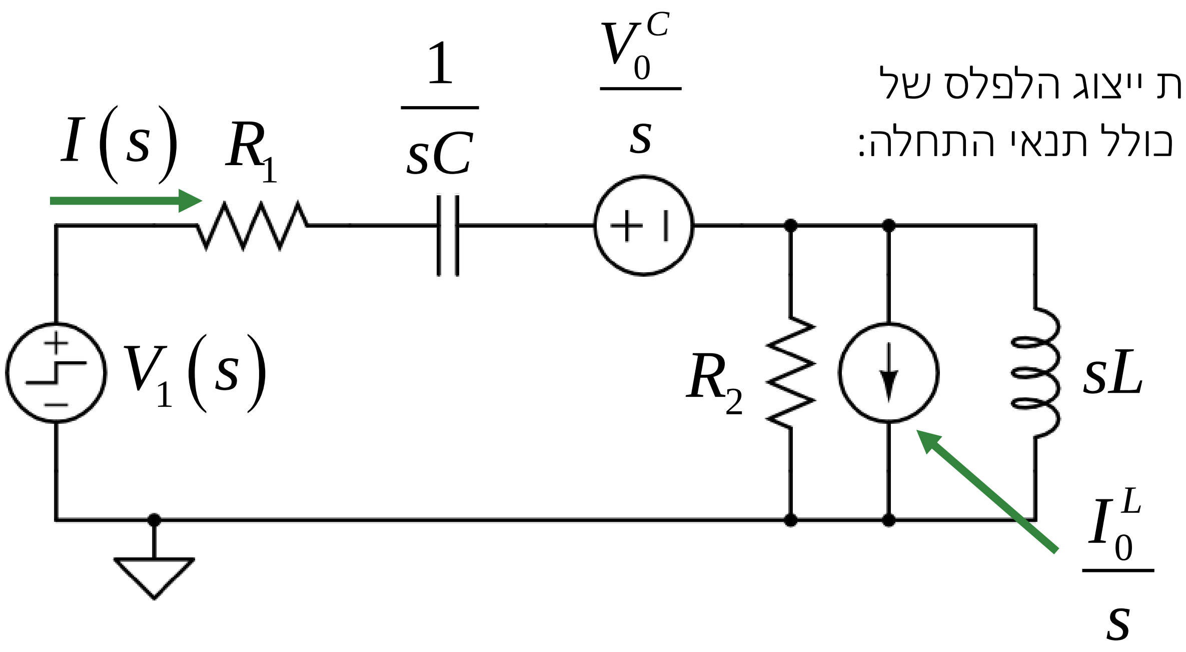
נתון המעגל מהדוגמא הקודמת אבל הפעם אות המוצא
הוא זרם המקור ונתון כי יש גם תנאי התחלה:

$$i_L(0) = 100\ \text{mA} \qquad v_C(0) = 2\ \text{V}$$

1. מצא את התגובה **הכוללת** של המערכת למדרגה

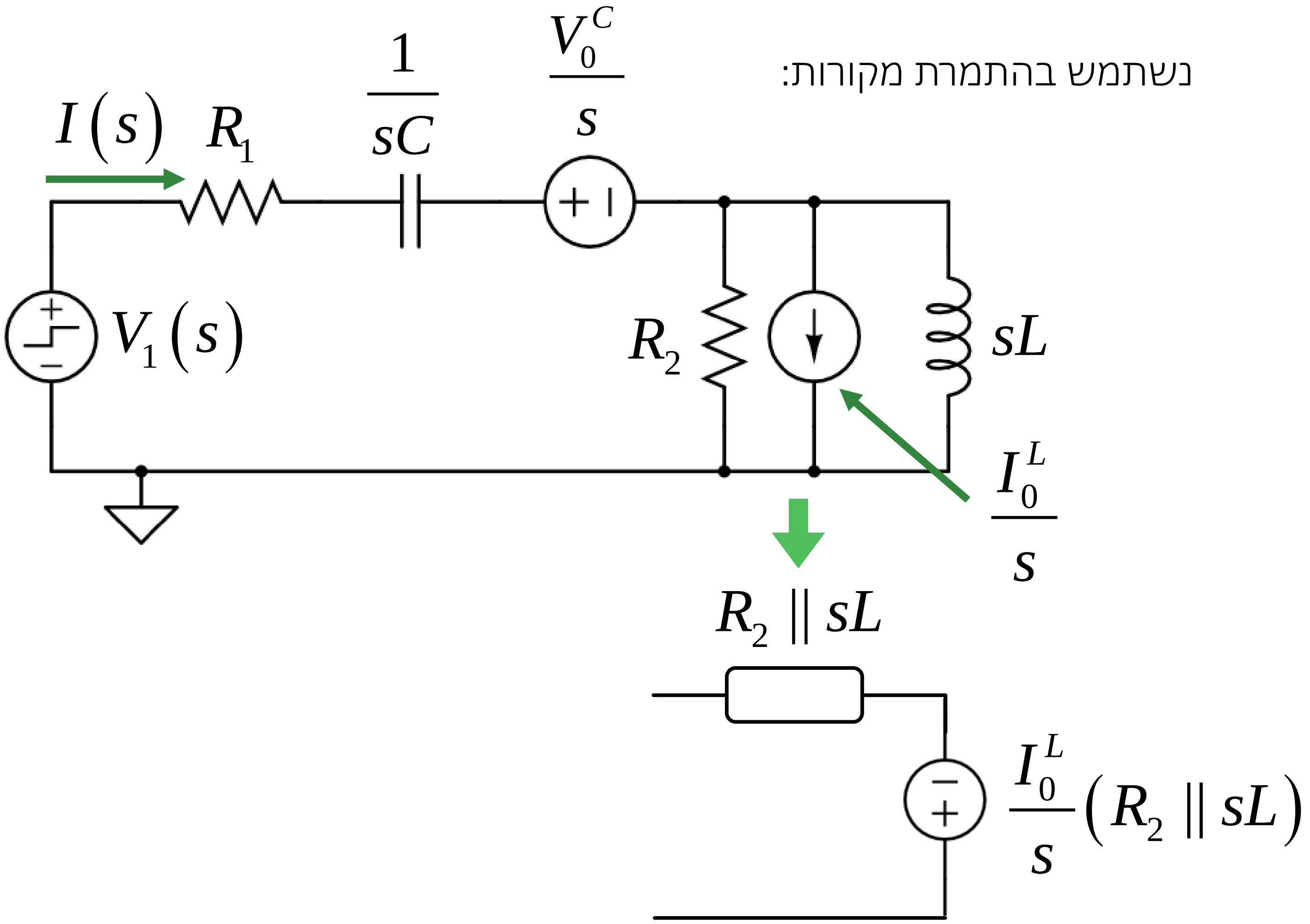
דוגמא

נצייר את ייצוג הלפלס של המעגל כולל תנאי התחלה:



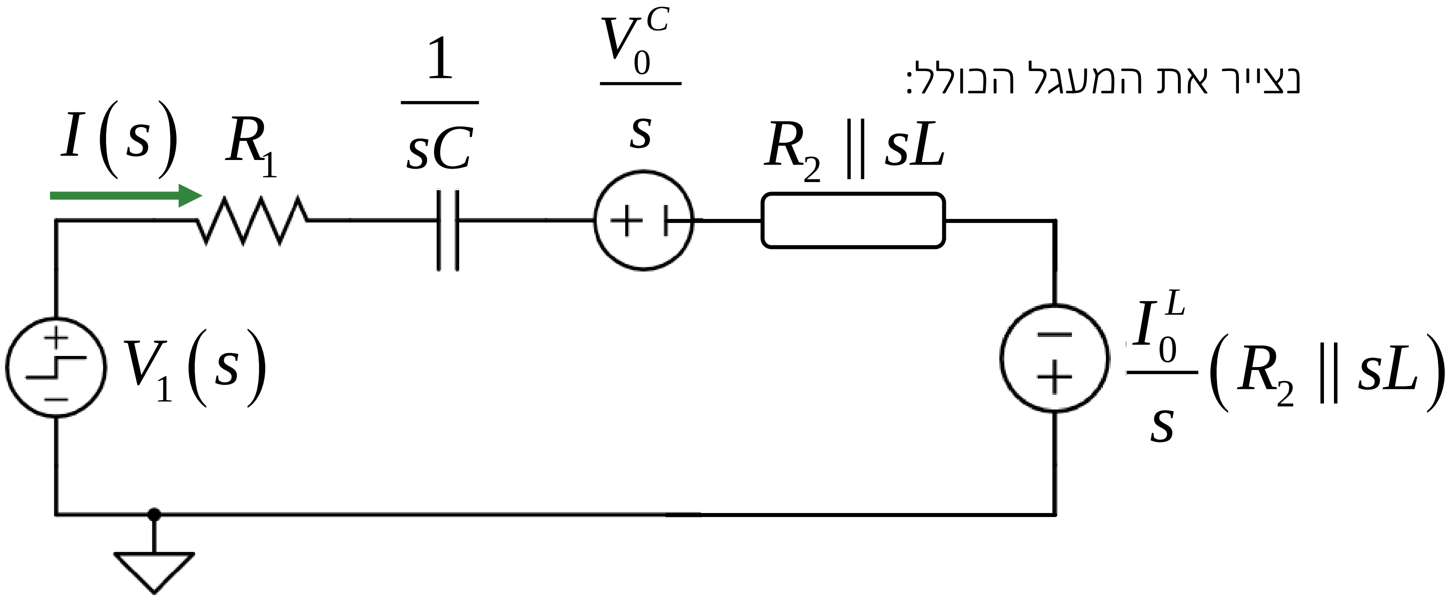
דוגמא

נשתמש בהתמרת מקורות:

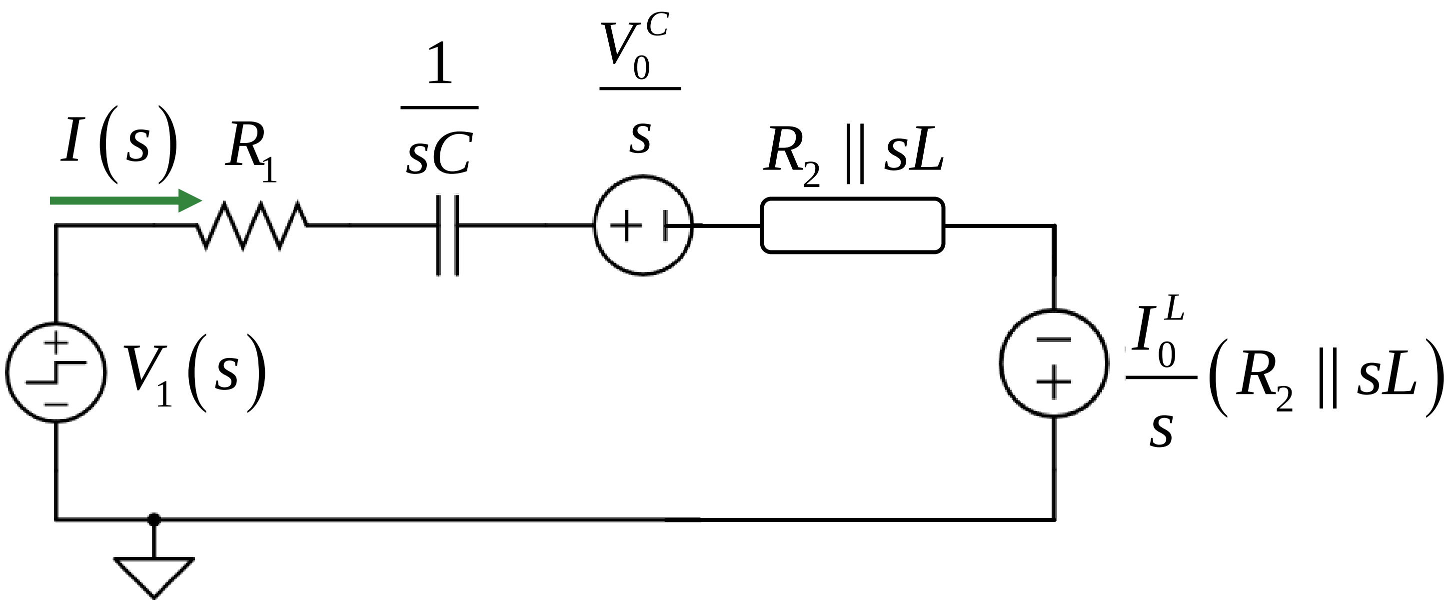


דוגמא

נצייר את המעגל הכולל:



דוגמא



$$\left(R_1 + \frac{1}{sC} + R_2 \parallel sL\right) I(s) + \frac{V_0^C}{s} - \frac{I_0^L}{s}(R_2 \parallel sL) = V_1(s)$$

דוגמא

$$\left(R_1+\frac{1}{sC}+R_2 \parallel sL\right)I(s)+\frac{V_0^C}{s}-\frac{I_0^L}{s}\left(R_2 \parallel sL\right)=V_1(s)$$

$$I(s)=\underbrace{\frac{1}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2 \parallel sL}}_{\textbf{ZSR}}V_1(s)-\underbrace{\frac{\frac{V_0^C}{s}-\frac{I_0^L}{s}\left(R_2 \parallel sL\right)}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2 \parallel sL}}_{\textbf{ZIR}}$$

ZSR

$$I_{ZSR}(s)=\frac{1}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2\,||\,sL}V_1(s)$$

$$I_{ZSR}(s)=\frac{1}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2\,||\,sL}\frac{1}{s}$$

$$I_{ZSR}(s)=\frac{1}{sR_1+\frac{1}{C}+\frac{R_2 s^2 L}{R_2+sL}}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

ZSR

$$I_{ZSR}(s) = \frac{1}{sR_1 + \frac{1}{C} + \frac{R_2 s^2 L}{R_2 + sL}}$$

$$I_{ZSR}(s) = \frac{\frac{s}{R_2} + \frac{1}{L}}{s^2\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) + s\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C}\right) + \frac{1}{LC}}$$

$$I_{ZSR}(s) = \frac{0.01s + 0.2}{s^2 + 28s + 200}$$

ZSR

$$I_{ZSR}(s) = \frac{0.01s + 0.2}{s^2 + 28s + 200}$$

$$s^2 + 28s + 200 = (s+\alpha)^2 + \beta^2$$

$$\alpha = 14$$

$$\beta = 2$$

$$H(s) = \frac{C_1(s+14)}{(s+14)^2 + 4} + \frac{C_0 2}{(s+14)^2 + 4}$$

ZSR

$$I_{ZSR}(s)=\frac{0.01s+0.2}{s^2+28s+200}$$

$$I_{ZSR}(s)=\frac{C_1(s+14)}{(s+14)^2+4}+\frac{C_0 2}{(s+14)^2+4}$$

נציב: $s=0$ $\quad 14C_1+2C_0=0.2$

נציב: $s=1$ $\quad 15C_1+2C_0=0.21$

$$C_1=0.01 \qquad C_0=0.03$$

$$I_{ZSR}(s)=\frac{0.01(s+14)}{(s+14)^2+4}+\frac{0.06}{(s+14)^2+4}$$

ZSR

$$I_{ZSR}(s)=\frac{0.01(s+14)}{(s+14)^2+4}+\frac{0.06}{(s+14)^2+4}$$

$$I_{ZSR}(s)=0.01\frac{s+14}{(s+14)^2+4}+0.03\frac{2}{(s+14)^2+4}$$

$$i_{ZSR}=0.01\cos(2t)e^{-14t}+0.03\sin(2t)e^{-14t}$$

ZIR

$$I(s)=\underbrace{\frac{1}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2\parallel sL}V_1(s)}_{\textbf{ZSR}}\underbrace{-\frac{\frac{V_0^C}{s}-\frac{I_0^L}{s}\left(R_2\parallel sL\right)}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2\parallel sL}}_{\textbf{ZIR}}$$

$$I_{ZIR}(s)=-\frac{\frac{V_0^C}{s}-\frac{I_0^L}{s}\left(R_2\parallel sL\right)}{R_1+\frac{1}{sC}+R_2\parallel sL}$$

ZIR

$$I_{ZIR}\left(s\right) = -\frac{\frac{V_0^C}{s} - \frac{I_0^L}{s}\left(R_2 \parallel sL\right)}{1}$$

$$= -\frac{V_0^C C\left(R_2 + sL\right) - I_0^L R_2 LCs}{sR_1 C\left(R_2 + sL\right) + (R_2 + sL) + R_2 s^2 LC}$$

ZIR

$$I_{ZIR}(s) = -\frac{V_0^C C(R_2 + sL) - I_0^L R_2 LCs}{sR_1C(R_2 + sL) + (R_2 + sL) + R_2 s^2 LC}$$

$$I_{ZIR}(s) = -\frac{s\left(\frac{V_0^C}{R_2} - I_0^L\right) + \frac{V_0^C}{L}}{s^2\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) + s\left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2C}\right) + \frac{1}{LC}}$$

$$I_{ZIR}(s) = -0.1\frac{0.1s + 4}{s^2 + 28s + 200} \Rightarrow I_{ZIR}(s) = -\frac{0.01s + 0.4}{s^2 + 28s + 200}$$

ZIR

$$I_{ZIR}(s) = -\frac{0.01s + 0.4}{s^2 + 28s + 200}$$

$$I_{ZIR}(s) = \frac{C_1(s+14)}{(s+14)^2 + 4} + \frac{C_0 2}{(s+14)^2 + 4}$$

נציב: $s = 0$ $\quad 14C_1 + 2C_0 = -0.4$

נציב: $s = 1$ $\quad 15C_1 + 2C_0 = -0.41$

$$C_1 = -0.01 \quad C_0 = -0.13$$

$$I_{ZIR}(s) = -0.01\frac{(s+14)}{(s+14)^2 + 4} - 0.13\frac{2}{(s+14)^2 + 4}$$

ZIR

$$I_{ZIR}(s) = -0.01\frac{(s+14)}{(s+14)^2+4} - 0.13\frac{2}{(s+14)^2+4}$$

$$i_{ZIR}(t) = -0.01\cos(2t)e^{-14t} - 0.13\sin(2t)e^{-14t}$$

$$i(t) = i_{ZSR}(t) + i_{ZIR}(t)$$