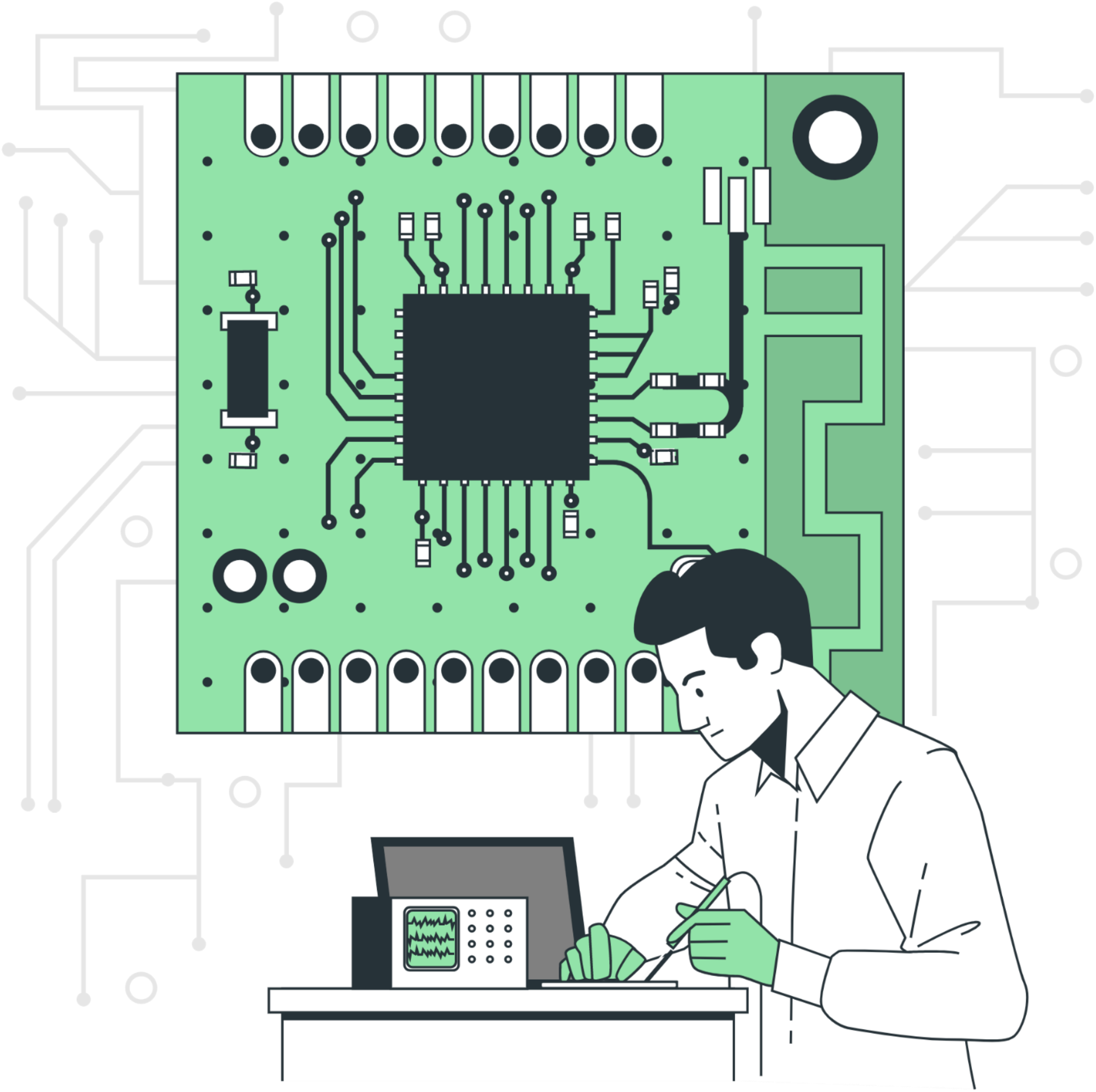


מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 2 : מעגלי זרם חילופין במצב מתמיד

מקטע 2.1 : ייצוג אותות זרם חילופין

מספרים מרוכבים

$$Z = a + ib$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$Z = a + jb$$

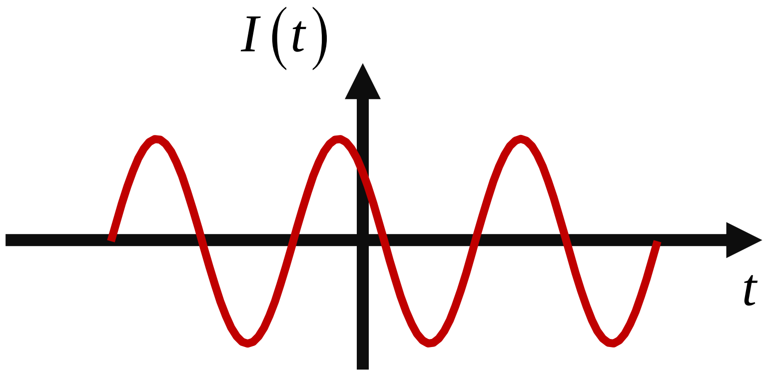
$$j = \sqrt{-1}$$

חיבור, חיסור, כפל, חילוק, הצגה קרטזית, טריגונומטרית ופולרית,
נוסחת אוילר, הצמוד המרוכב, ערך מוחלט של **Z**, הזווית/ארגומנט של **Z** .

אות זרם/מתח חילופין

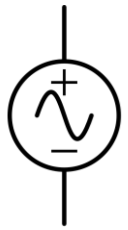
Direct Current - DC

Alternating Current - AC

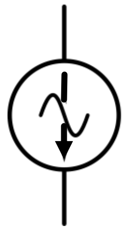


$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_I)$$

אות זרם/מתח חילופין

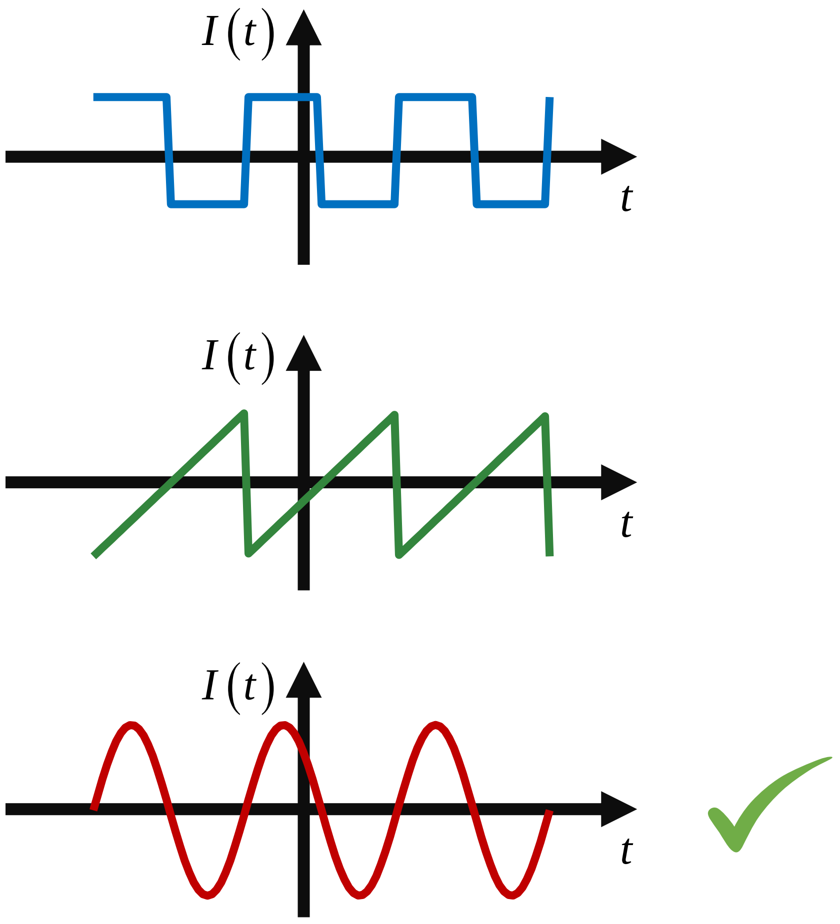


מקור **<u>מתח</u>** חילופין
(מקור מתח AC)



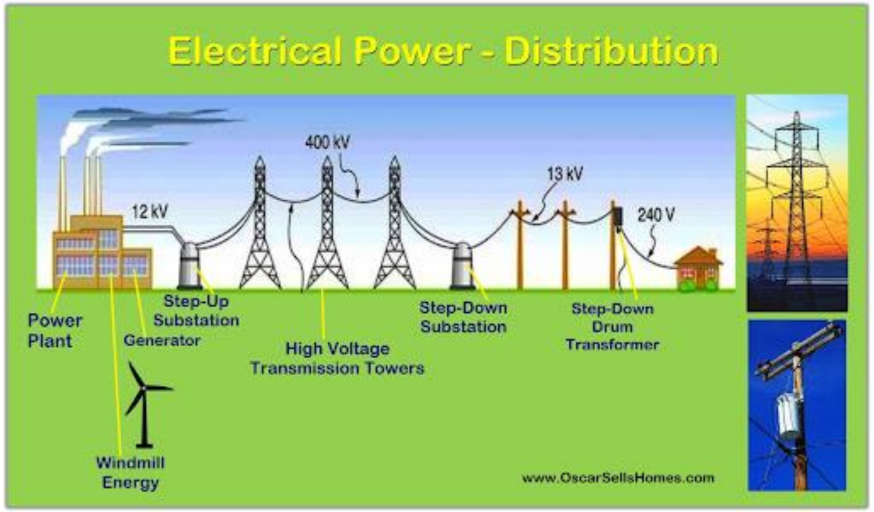
מקור **<u>זרם</u>** חילופין
(מקור זרם AC)

למה דווקא אותות סינוסואידליים?

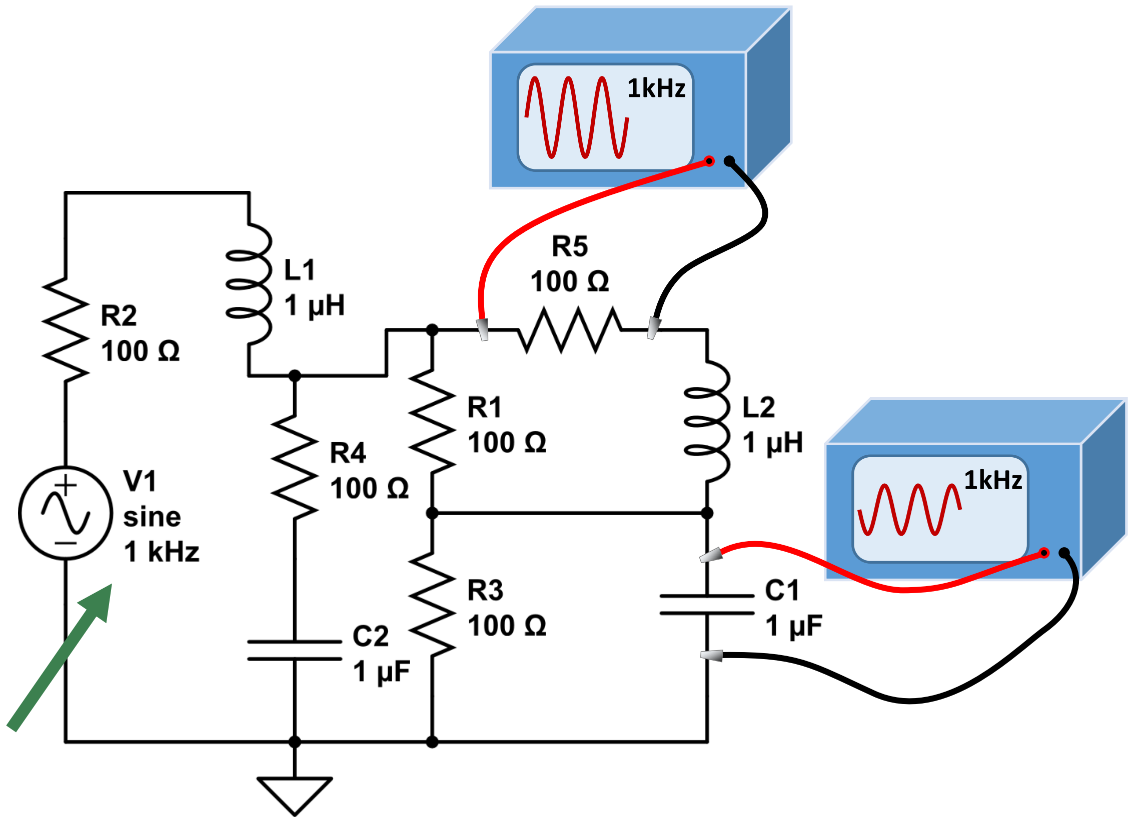


למה דווקא אותות סינוסואידליים?

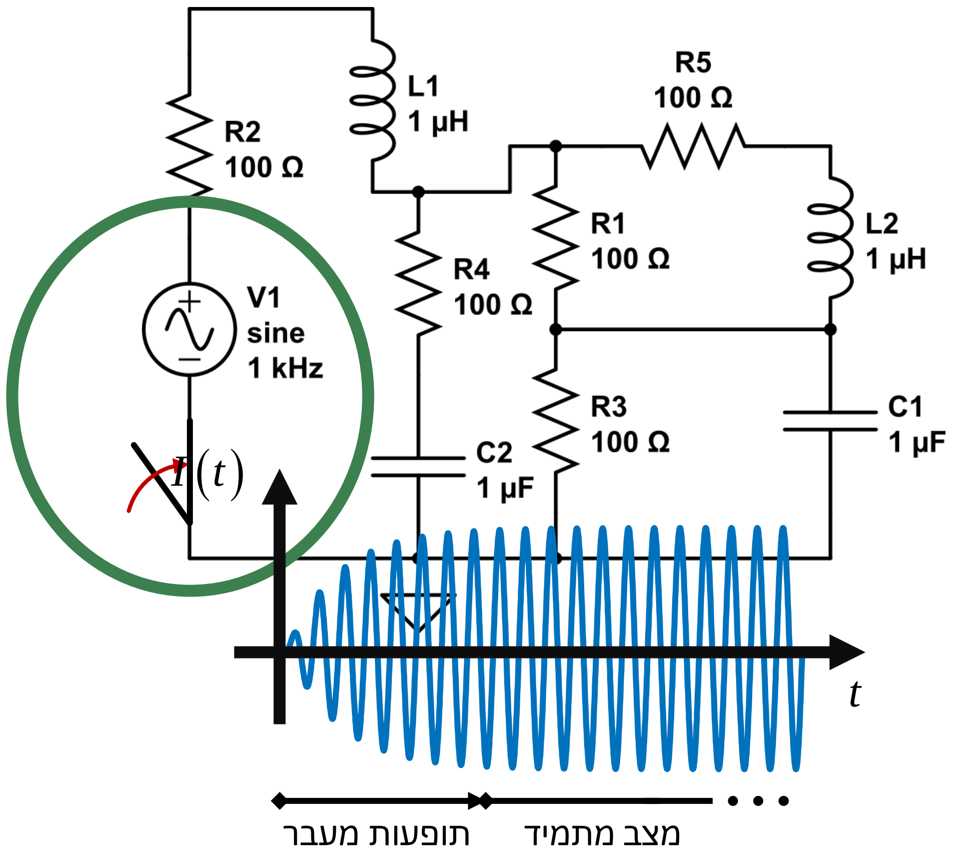
1. קל לייצר אותם, לשנות את המתח שלהם ולשנע אותם
2. אפשר לייצג בעזרתם את כל האותות האחרים
3. במעגל לינארי עם מקור סינוסואידלי בתדר מסוים, כל המתחים והזרמים הם אותות סינוסואידליים באותו תדר



למה דווקא אותות סינוסואידליים?

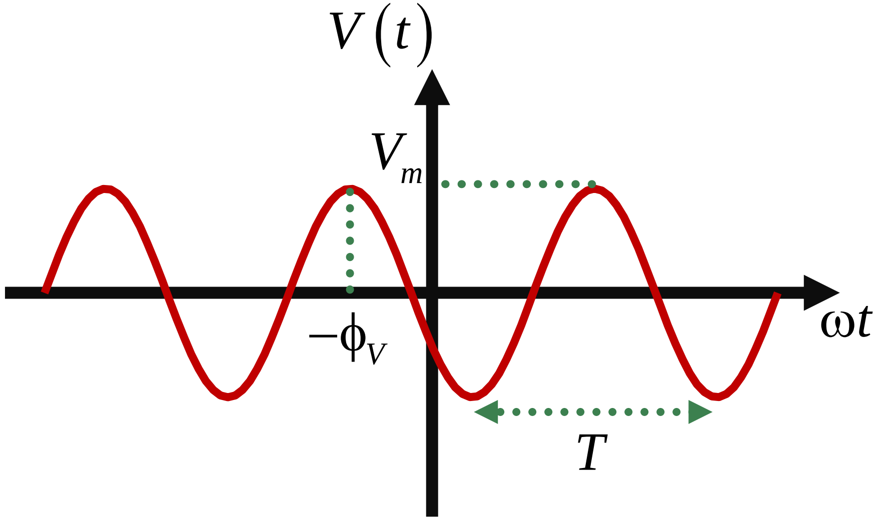


תופעות מעבר ומצב מתמיד



ייצוג אותות AC – ייצוג רגיל (זמני)

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_V)$$



V_m - אמפליטודה (וולט או אמפר)

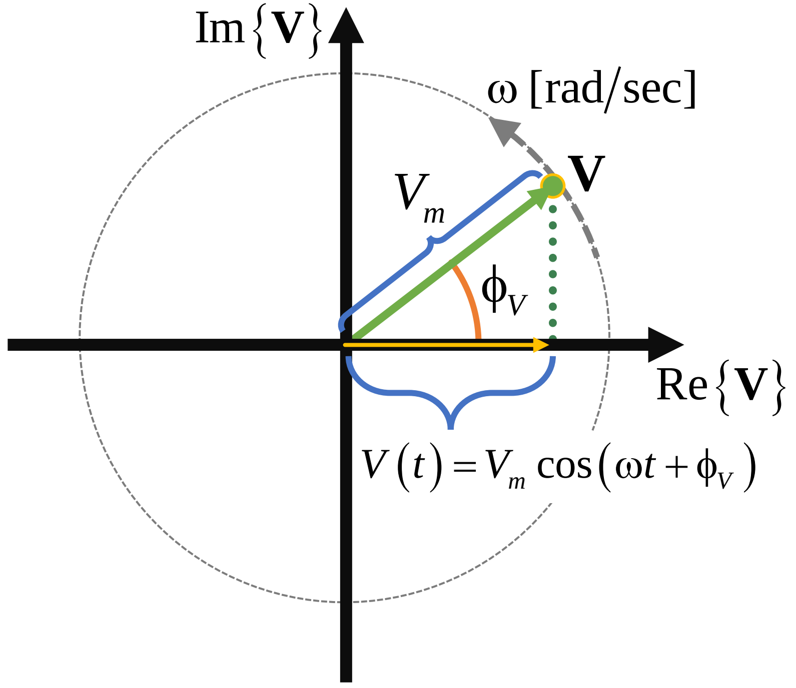
ϕ_V - פאזה (רדיאנים)

ω - תדר זוויתי (רדיאנים לשנייה)

$f = \omega/(2\pi)$ - תדר (הרץ)

$T = 1/f$ - זמן מחזור (שניות)

ייצוג אותות AC – ייצוג פאזורי



$$\mathrm{Re}\{\mathbf{V}\}=V(t)=V_m\cos(\omega t+\phi_V)$$

ייצוג אותות AC – ייצוג פאזורי

$$\mathbf{V} = \underbrace{V_m \cos\left(\omega t + \phi_V\right)}_{\operatorname{Re}\{\mathbf{V}\}} + \underbrace{jV_m \sin\left(\omega t + \phi_V\right)}_{\operatorname{Im}\{\mathbf{V}\}}$$

נוסחת אוילר:

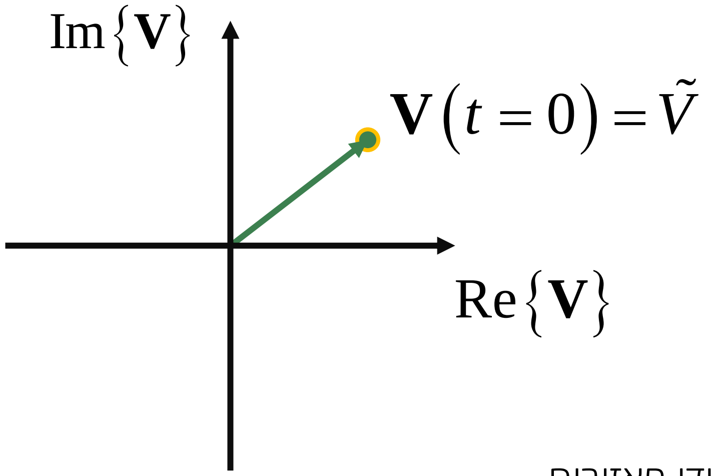
$$e^{j\theta} = \cos\left(\theta\right) + j\sin\left(\theta\right)$$

ומכאן:

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\left(\omega t + \phi_V\right)}$$

פאזור

ייצוג אותות AC – ייצוג פאזורי



- אותות **AC** במעגל חשמלי מיוצגים על ידי פאזורים
- הפאזור הוא מספר מרוכב שהגודל שלו הוא האמפליטודה של האות והזווית שלו היא הפאזה של האות:

$$\tilde{V}=\left|\tilde{V}\right|e^{j\phi_V}=\left|\tilde{V}\right|\underbrace{\mathrm{cis}}_{\cos+j\sin}\left(\phi_V\right)=\left|\tilde{V}\right|\angle\phi_V$$

- בהינתן פאזור שמייצג אות כלשהו ניתן למצוא את האות עצמו בעזרת הקשר:

$$V\left(t\right)=\mathrm{Re}\left\{\tilde{V}e^{j\omega t}\right\}$$

ייצוג פאזורי - דוגמא

נתון הפאזור שמייצג את המתח על נגד:

$$\tilde{V} = 10\angle \pi/3 = 10e^{j\pi/3}\ [V]$$

ידוע כי תדר המקור במעגל הוא 50Hz.
מצא את מתח הנגד בייצוג הזמני שלו.

$$V(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{V}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{10e^{j\pi/3}e^{j2\pi\cdot 50t}\right\} =$$

$$= 10\cos\left(2\pi\cdot 50t + \pi/3\right)$$

ייצוג פאזורי - דוגמא נוספת

נתון הזרם דרך נגד במעגל מסוים:

$$I(t) = 7\sin\left(2\pi\cdot 300t + \pi/12\right)$$

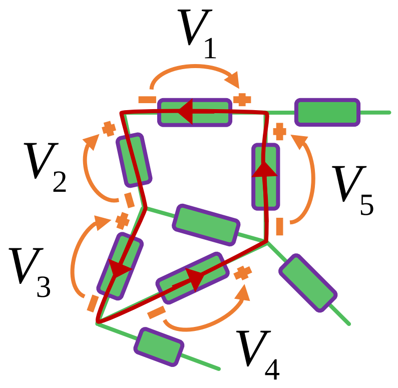
מצא את הייצוג הפאזורי שלו.

$$\begin{aligned} I(t) &= 7\sin\left(2\pi\cdot 300t + \pi/12\right) = \\ &= 7\cos\left(2\pi\cdot 300t - 5\pi/12\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left\{7e^{j\left(2\pi\cdot 300t - 5\pi/12\right)}\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{\underbrace{7e^{-j5\pi/12}}_{\tilde{I}}\cdot e^{j2\pi\cdot 300t}\right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)}$$

$$\tilde{I}(t) = 7e^{-j5\pi/12} = 7\angle\left(-5\pi/12\right)$$

חוקי קירכהוף לאותות AC



$$\sum_k V_k = -V_1 - V_2 - V_3 + V_4 + V_5 = 0$$

$$-V_{1m}\cos\left(\omega t+\phi_{V1}\right)-V_{2m}\cos\left(\omega t+\phi_{V2}\right)$$
$$-V_{3m}\cos\left(\omega t+\phi_{V3}\right)+V_{4m}\cos\left(\omega t+\phi_{V4}\right)$$
$$+V_{5m}\cos\left(\omega t+\phi_{V5}\right)=0$$

ייצוג פאזורי – סכום של אותות זמניים

במקום לחבר את האותות הזמניים אפשר לחבר את הפאזורים שלהם:

$$V_m \cos(\omega t + \phi_V) = V_{m1} \cos(\omega t + \phi_{V1}) + V_{m2} \cos(\omega t + \phi_{V2})$$

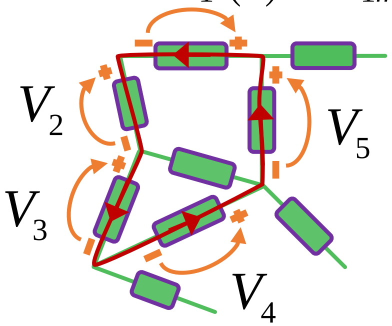
$$\tilde{V} = V_m \angle \phi_V \qquad \tilde{V}_1 = V_{m1} \angle \phi_{V1} \qquad \tilde{V}_2 = V_{m2} \angle \phi_{V2}$$

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$$

$$V(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{V} e^{j\omega t}\right\} = V_m \cos(\omega t + \phi_V)$$

חוקי קירכהוף לאותות AC

$$V_1(t) = V_{1m}\cos(\omega t + \phi_{V1})$$



$$\sum_k V_k(t) = -V_1(t) - V_2(t) - V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_k \tilde{V}_k = -\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 + \tilde{V}_4 + \tilde{V}_5 = 0$$

חוק אוהם לאות AC

$$V(t) = I(t)R$$

חוק אוהם

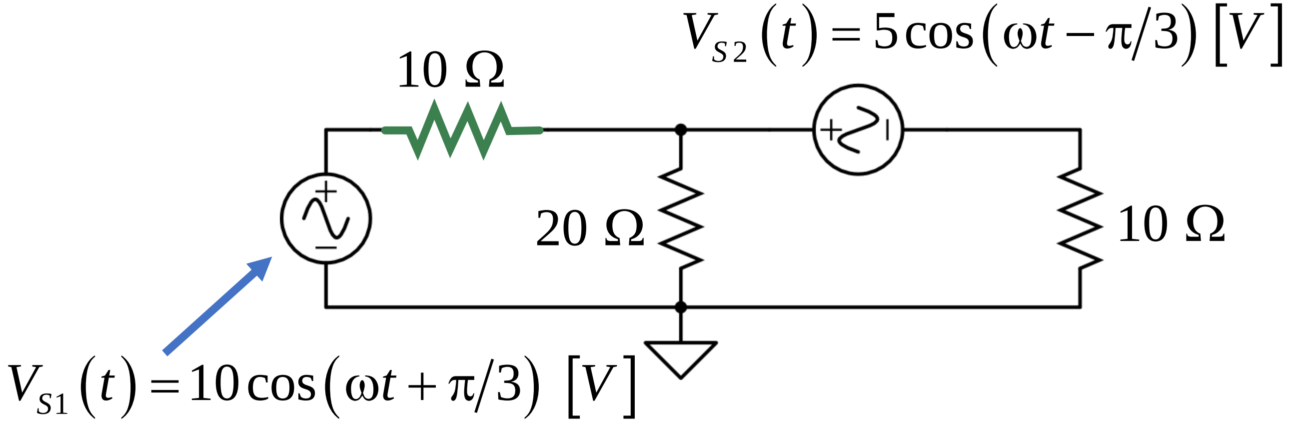
במקום לכפול את האות הזמני בקבוע כלשהו, אפשר לכפול את הפאזור שלו:

$$I_{m1}\cos(\omega t + \phi_{I1}) \Rightarrow \tilde{I}_1 = I_{m1}\angle\phi_{I1}$$

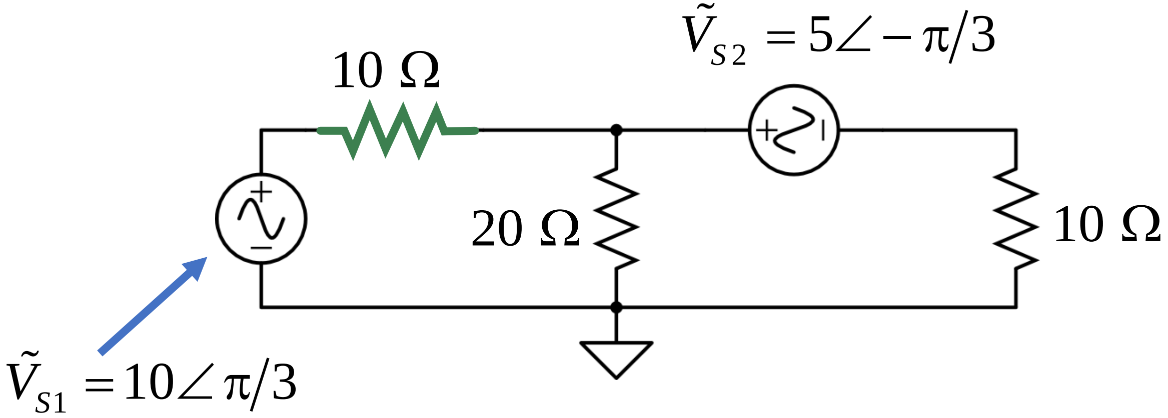
$$V(t) = rI_{m1}\cos(\omega t + \phi_{I1}) \Rightarrow \tilde{V} = r\tilde{I}_1$$

דוגמא

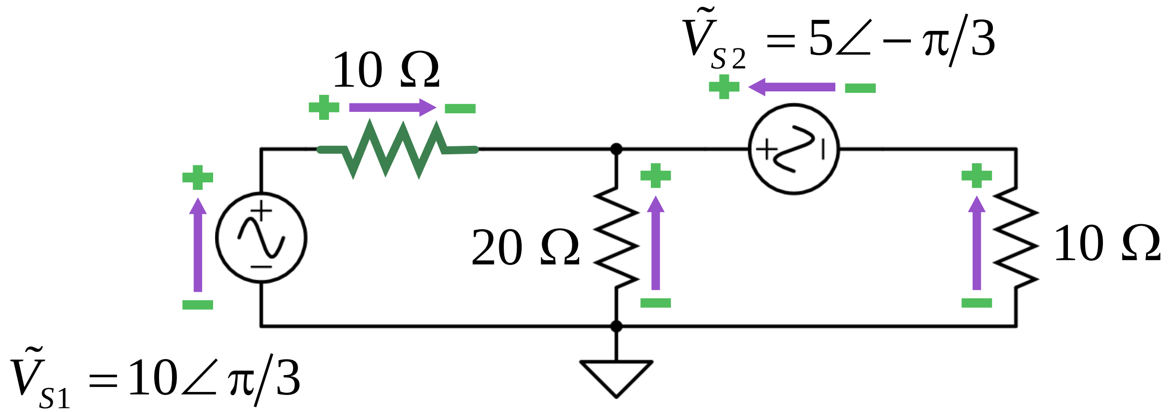
מצא את הזרם בנגד ה-**10** אוהם השמאלי.



ראשית נציג את מתחי המקורות בייצוג פאזורי

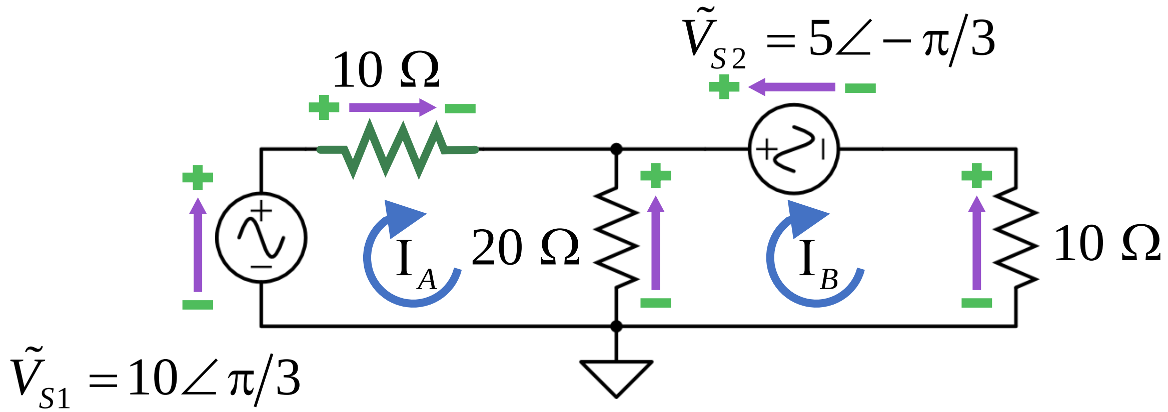


נסמן ביווני ייחוס

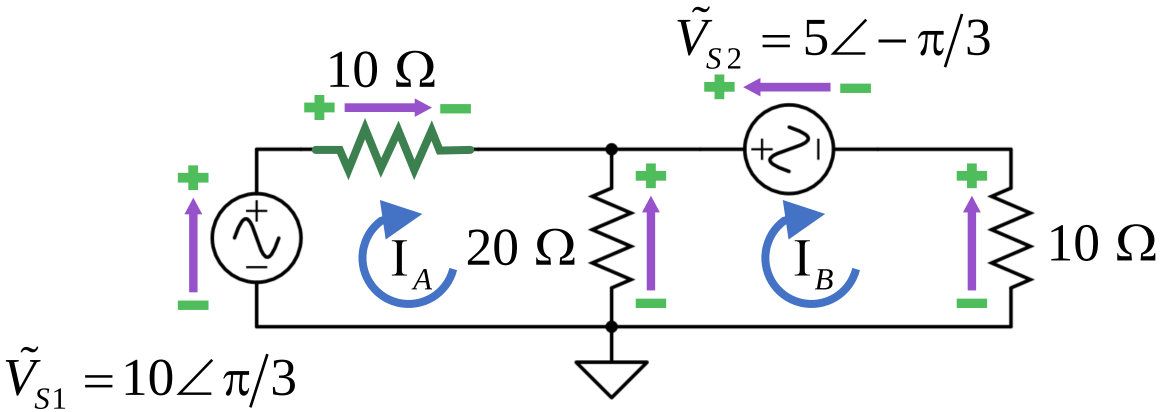


VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

נסמן זרמי חוגים

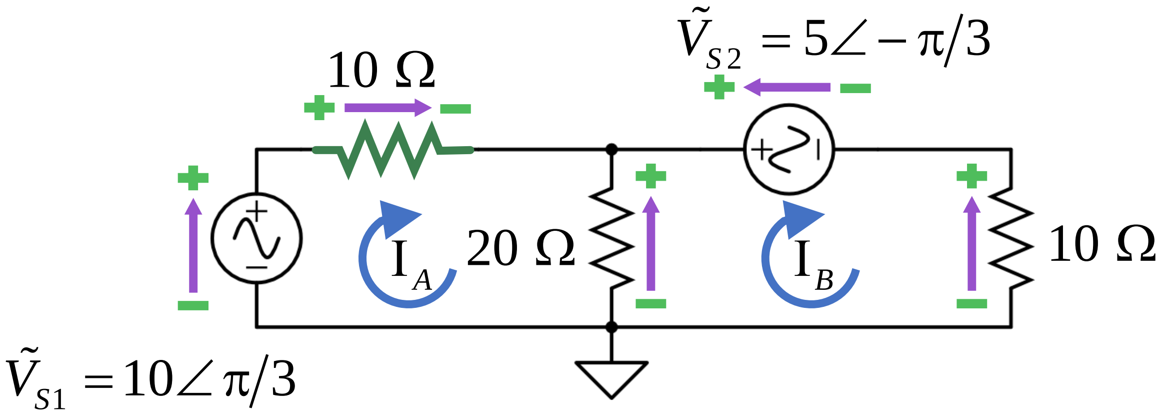


נרשום משוואות KVL



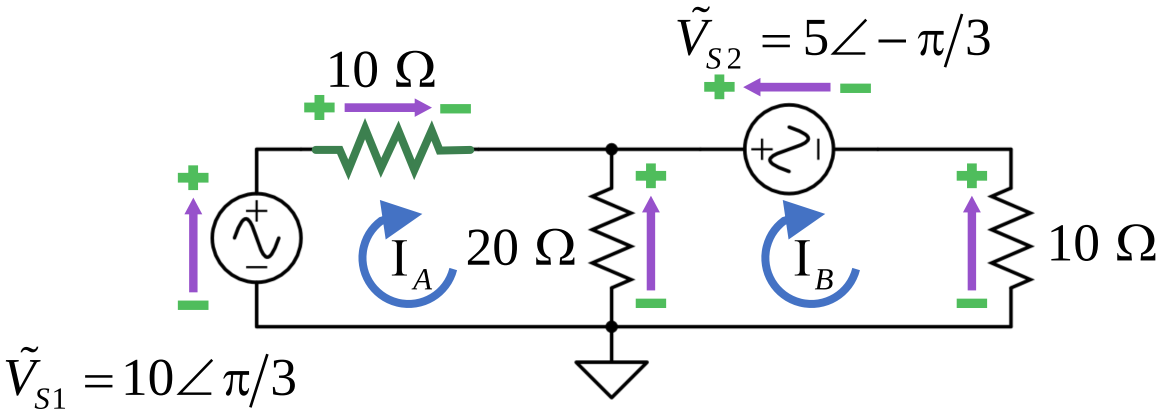
$$\begin{bmatrix} 10\Omega + 20\Omega & -20 \\ -20 & 20\Omega + 10\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{I}_A \\ \tilde{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{S1} \\ -\tilde{V}_{S2} \end{bmatrix}$$

נפתור את המשוואות



$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_A \\ \tilde{I}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.04 \\ 0.04 & 0.06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{S1} \\ -\tilde{V}_{S2} \end{bmatrix}$$

נמצא את הזרם המבוקש



$$\tilde{I}_A = 0.06\tilde{V}_{S1} - 0.04\tilde{V}_{S2}$$

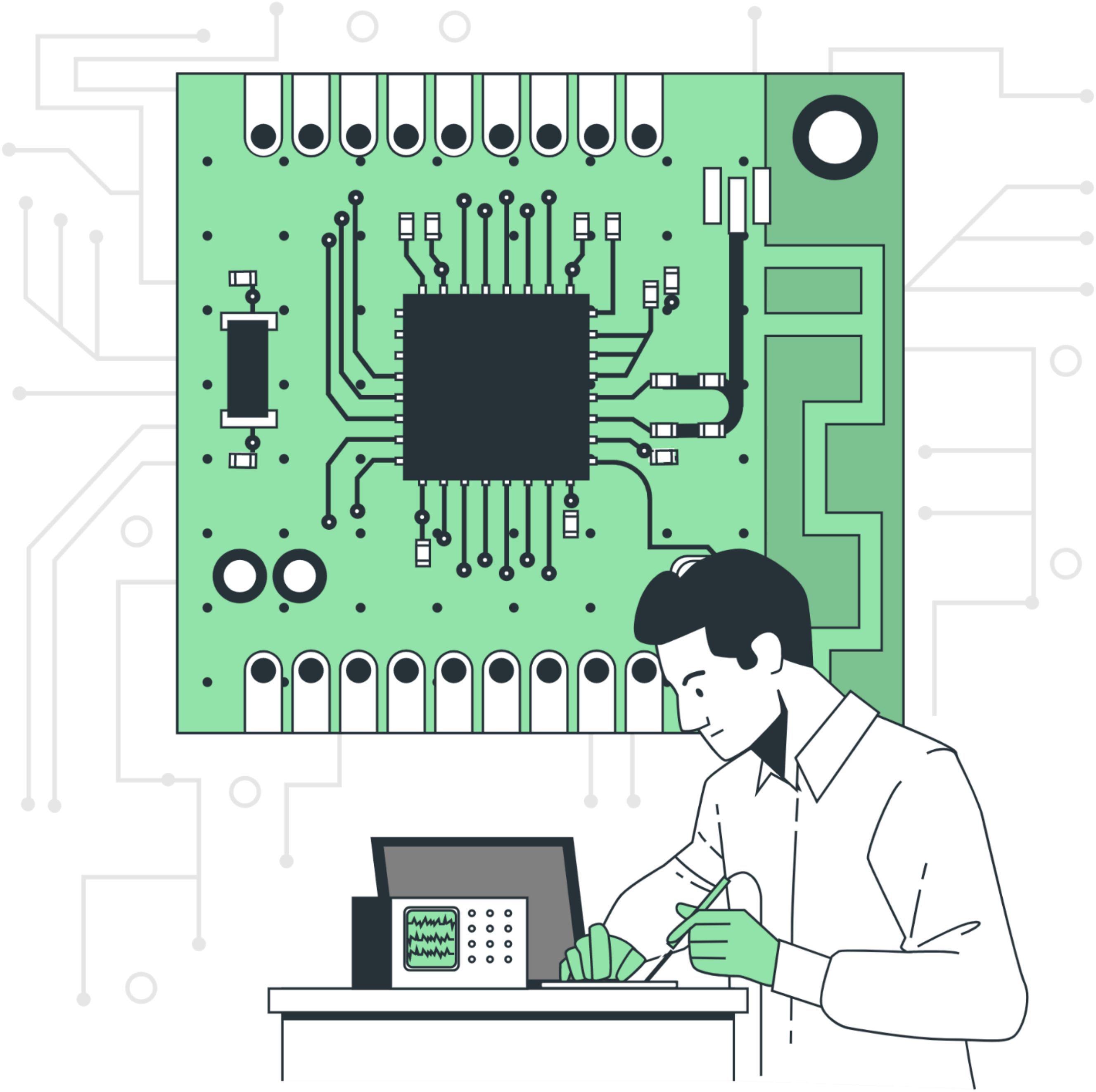
$$\tilde{I}_A = 0.06\cdot 10\angle \pi/3 - 0.04\cdot 5\angle -\pi/3$$

$$\tilde{I}_A = 0.2 + j0.693 = 0.7211\angle 1.29\ [A]$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות ליניאריות

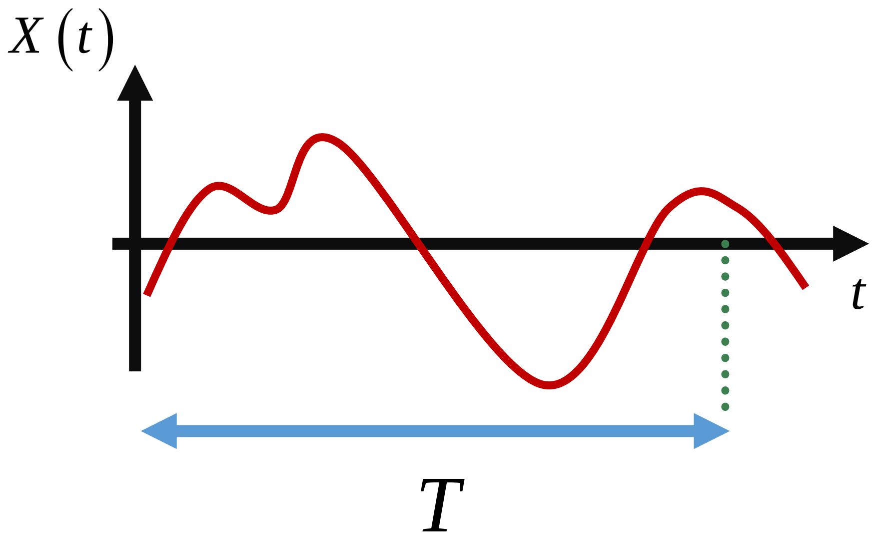
פרופ' אבישי אייל



יחידה 2 : מעגלי זרם חילופין

מקטע 2.2 : ערך אפקטיבי של אות חילופין

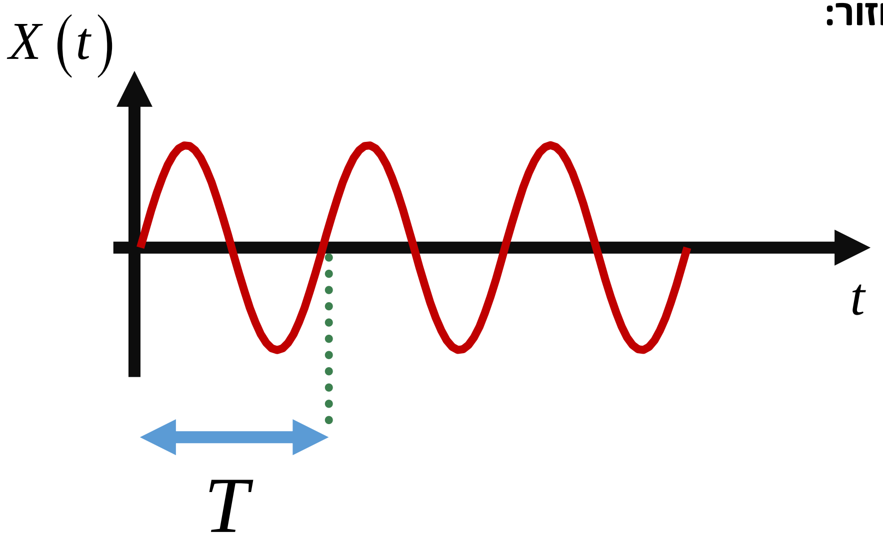
ממוצע זמני על אות



$$X_{\text{avg}}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t')\,dt'$$

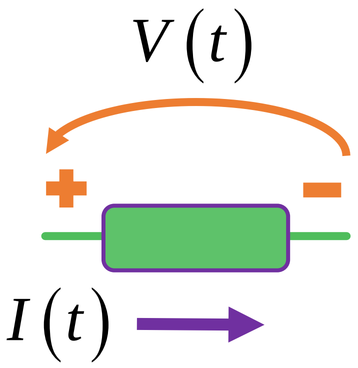
ממוצע זמני על אות AC

ממוצע על מחזור:



$$X_{avg}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T X_m \cos(\omega t + \phi_X)\, dt' = 0$$

הספק רגעי והספק ממוצע

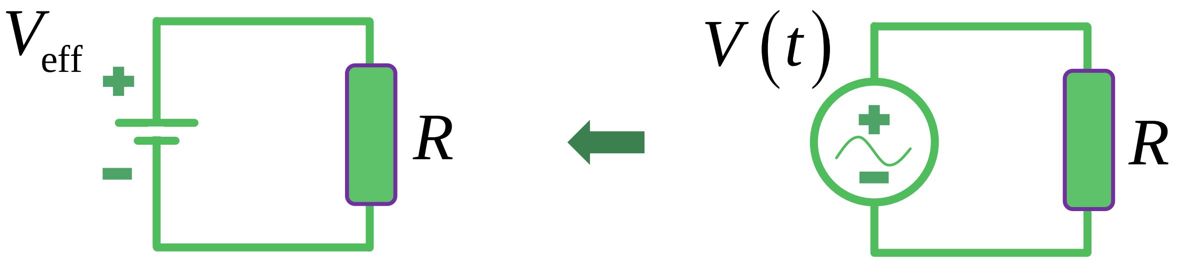


הספק רגעי $P(t)=V(t)I(t)$

הספק רגעי בנגד $P(t)=V(t)I(t)=\frac{V^2(t)}{R}=I^2(t)R$

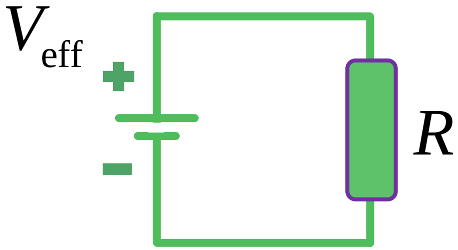
הספק ממוצע $P_{\text{avg}}(t)=\frac{1}{T}\int_0^T P(t')dt'=\frac{1}{T}\int_0^T V(t')I(t')dt'$

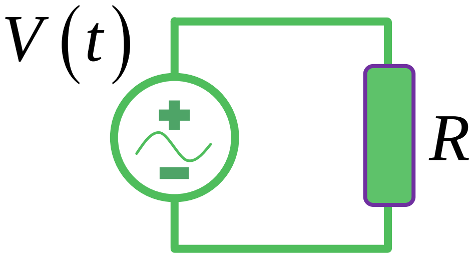
ערך אפקטיבי של אות



איזה ערך צריך לקבל מקור ה- **DC** כדי שההספק בנגד יהיה
שווה להספק הממוצע שמייצר אות המתח המשתנה?

ערך אפקטיבי של אות





$$P(t) = \frac{V^2(t)}{R}$$

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2(t')}{R}\,dt'$$

$$P = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R}$$

$$\frac{V_{\text{eff}}^2}{R} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V^2(t')}{R}\,dt'$$

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t')\,dt'}$$

ערך אפקטיבי = ערך RMS

RMS – **R**oot **M**ean **S**quare

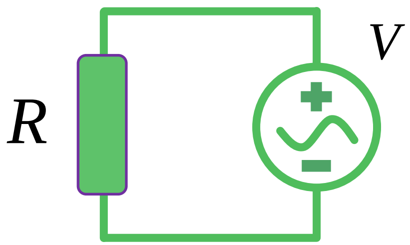
מתח RMS

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t')\,dt'}$$

זרם RMS

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(t')\,dt'}$$

ערך RMS של אות AC



$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_V)$$

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(t')\,dt'}$$

$$V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_V)\,dt'$$

$$\boxed{\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$$

$$= \frac{V_m^2}{T}\int_0^T \left[\frac{1+\cos(2\omega t + 2\phi_V)}{2}\right]dt' = \frac{V_m^2}{2}$$

$$\boxed{I_{\text{rms}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

שתי הגדרות לפאזורים של המתח והזרם

$$\tilde{V} = V_m \angle \phi_V$$

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_V)$$

$$\tilde{V} = V_{\mathrm{rms}} \angle \phi_V$$

$$V(t) = \sqrt{2} V_{\mathrm{rms}} \cos(\omega t + \phi_V)$$

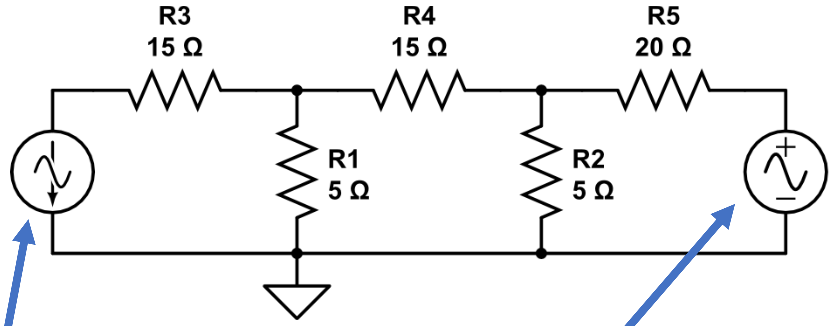
מתח הרשת בישראל

$$V(t) = 325\cos\left(2\pi \cdot 50t + \phi_V\right) \quad [V]$$

$$V_m \cong 325 \quad [V]$$

$$V_{rms} \cong \frac{325}{\sqrt{2}} \cong 230 \quad [V]$$

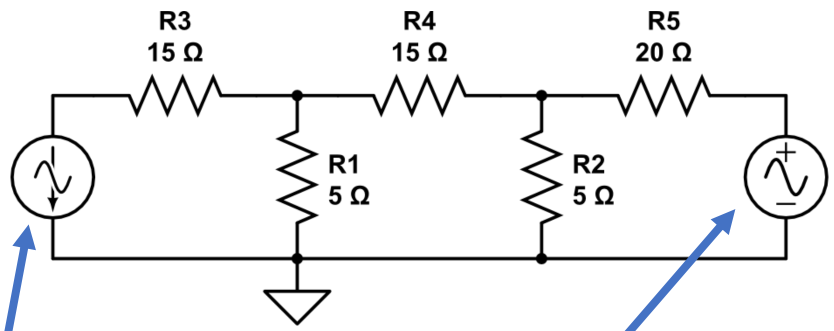
דוגמא



$$I_s = \sin\left(2\pi \cdot 1000t\right) \qquad V_s = 2\cos\left(2\pi \cdot 1000t\right)$$

במעגל שלפנינו, מצא את ההספק הממוצע בנגד R_4

נעבור לייצוג פאזורי



$$I_s = \sin\left(2\pi \cdot 1000t\right)$$

$$V_s = 2\cos\left(2\pi \cdot 1000t\right)$$

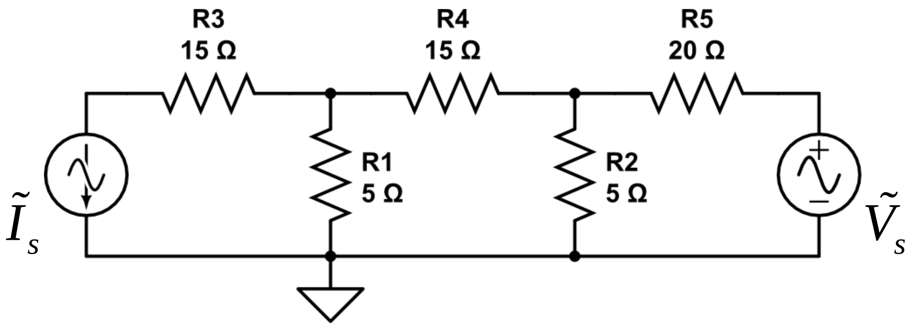
$$I_s = \cos\left(2\pi \cdot 1000t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tilde{I}_s = 1/\sqrt{2}\angle -\pi/2$$

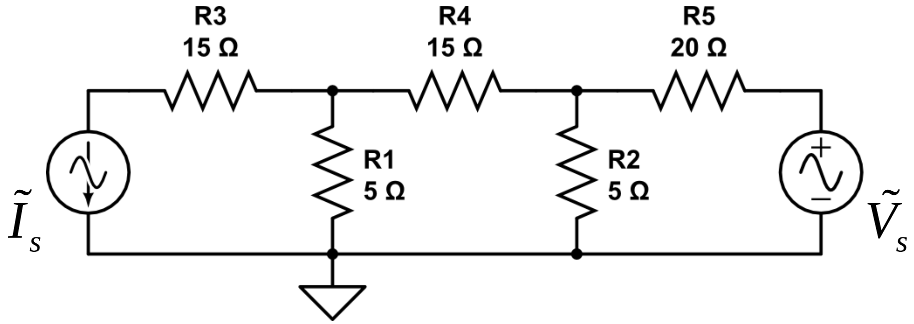
$$\tilde{V}_s = 2/\sqrt{2}\angle 0$$

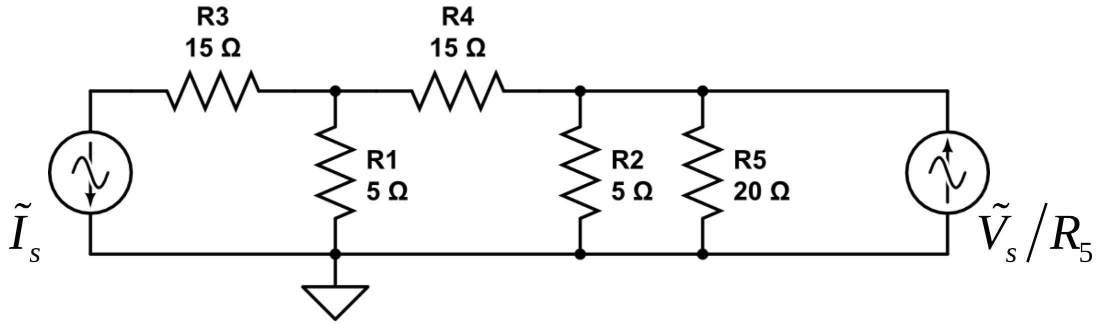
פאזור RMS

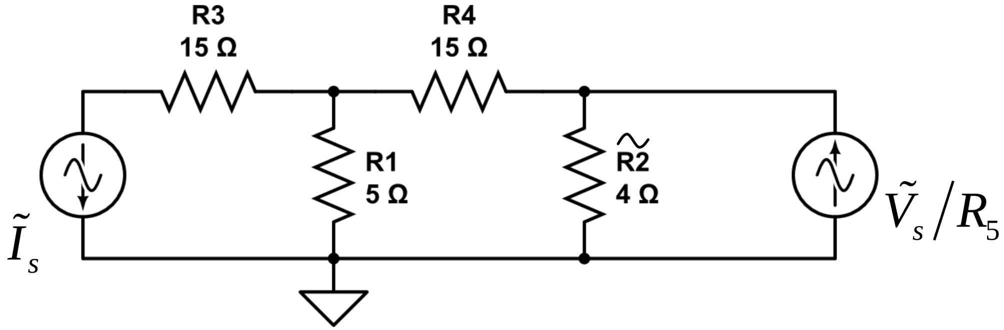
נעבור לייצוג פאזורי



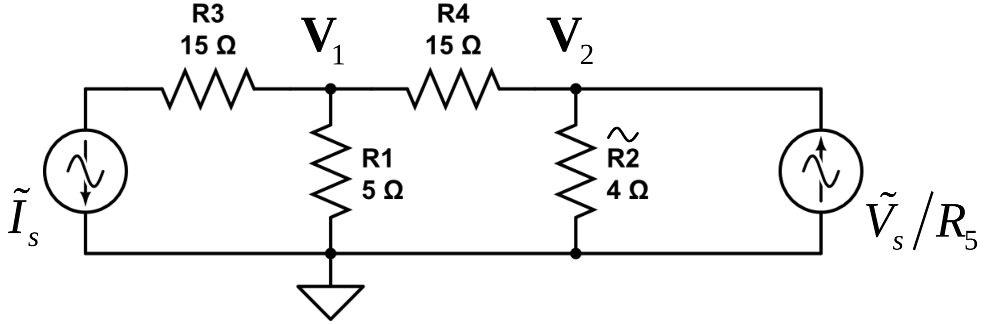
נפשט את המעגל מעט







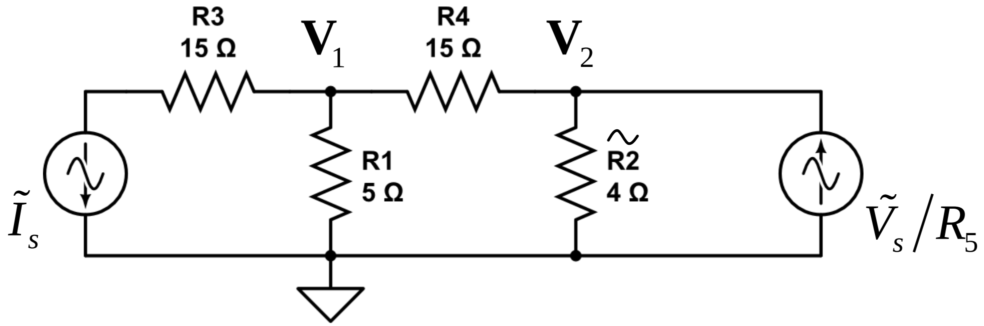
ונפתור בשיטת מתחי צמתים



$$\begin{bmatrix} G_1+G_4 & -G_4 \\ -G_4 & \tilde{G}_2+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\tilde{I}_s \\ G_5\tilde{V}_s \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.9583 & 0.8333 \\ 0.8333 & 3.3333 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2}\angle-\pi/2 \\ 0.1/\sqrt{2}\angle 0 \end{bmatrix}$$

ונפתור בשיטת מתחי צמתים



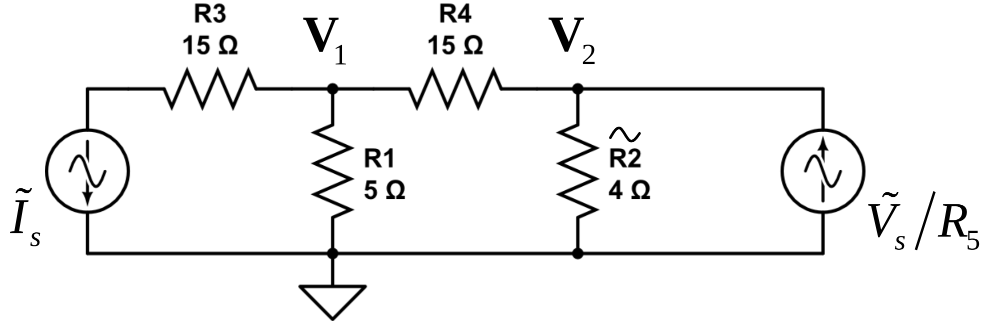
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9583 & 0.8333 \\ 0.8333 & 3.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2}\angle -\pi/2 \\ 0.1/\sqrt{2}\angle 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1 = 2.7996\angle 1.5497 \text{ [V]}$$

$$\mathbf{V}_2 = 0.6346\angle 1.1903 \text{ [V]}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

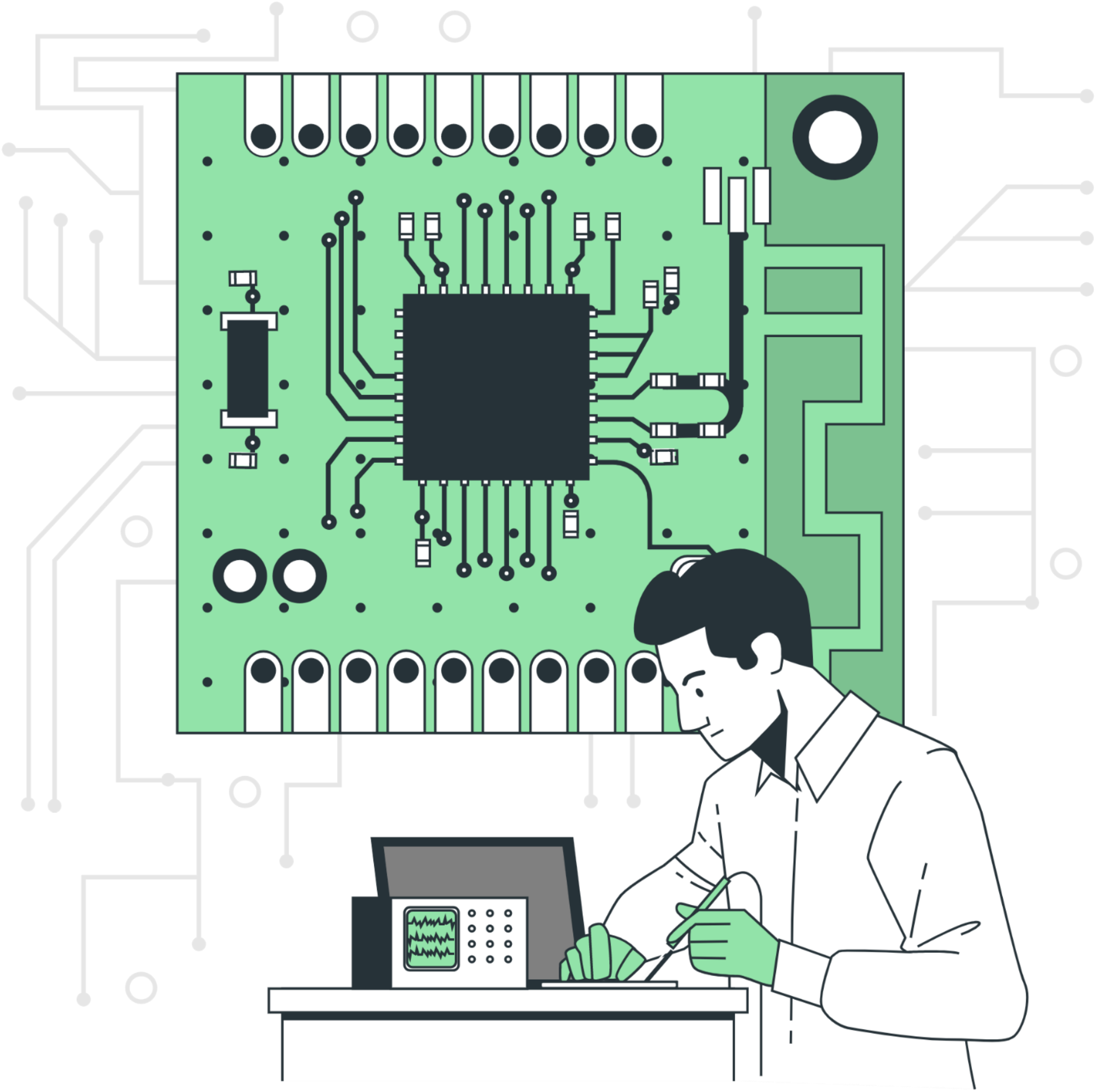
ולכן:



RMS

$$\tilde{V}_4 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 2.2168\angle 1.6506 \ \ [\mathrm{V}]$$

$$P_4 = \frac{\left|\tilde{V}_4\right|^2}{R_4} = \frac{4.9141}{15} = 0.3276 \ \ [W]$$



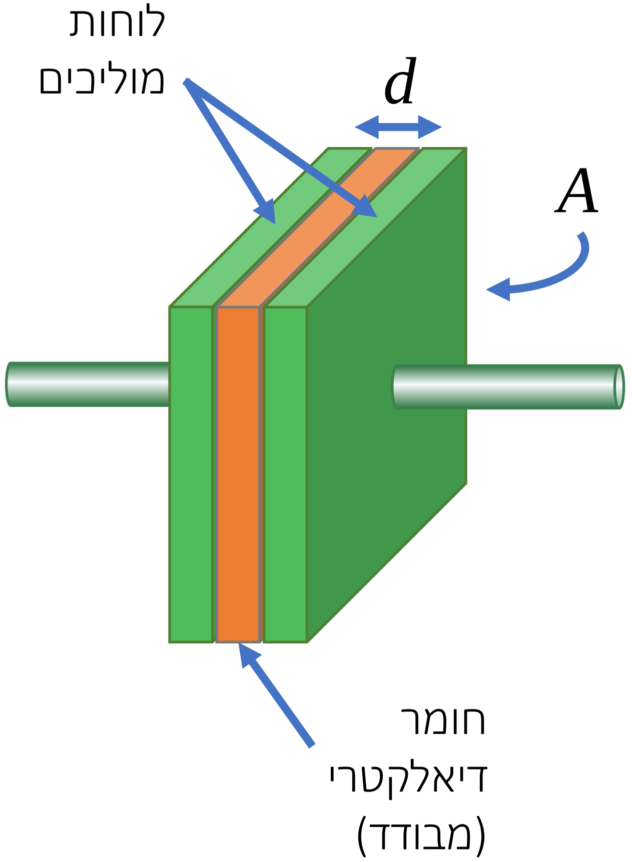
מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 2 : מעגלי זרם חילופין

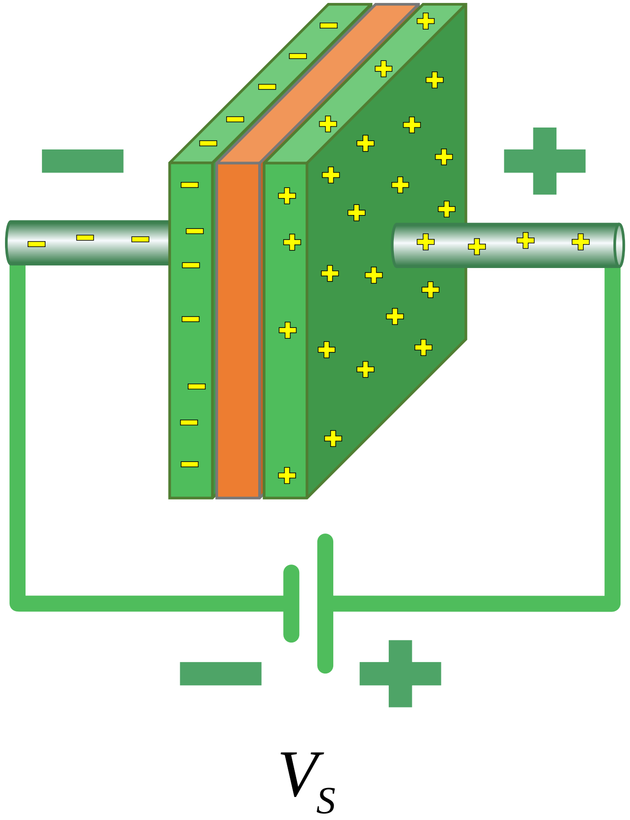
מקטע 2.3 : רכיבים בסיסיים נוספים

קבל (Capacitor)

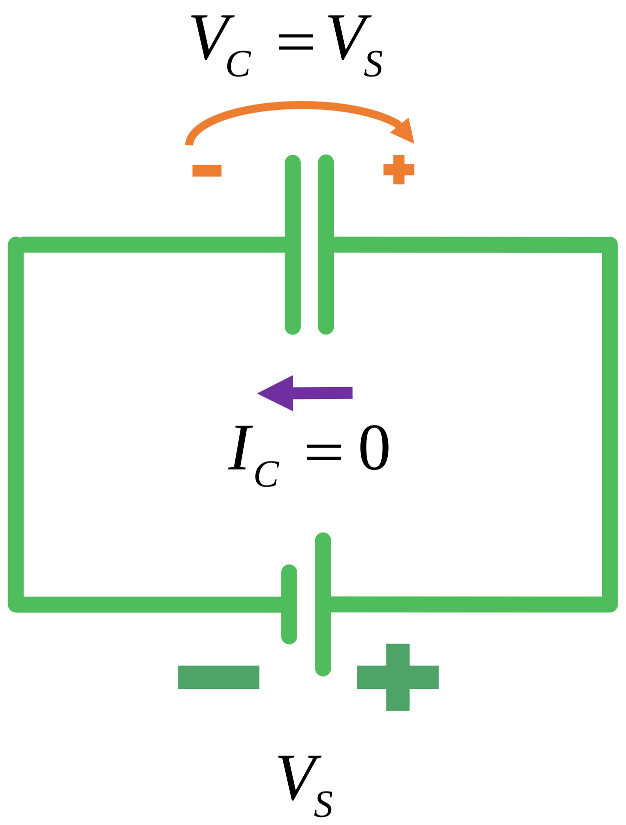


A- שטח הלוחות
d – המרחק בין הלוחות

קבל

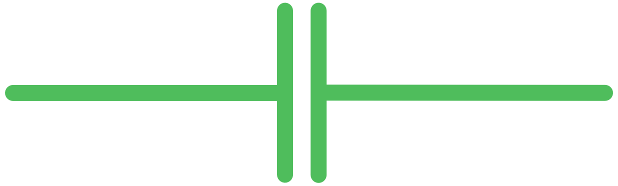


קבל – במעגלי DC

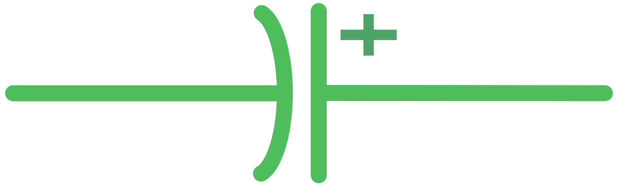


קבל - סימונים

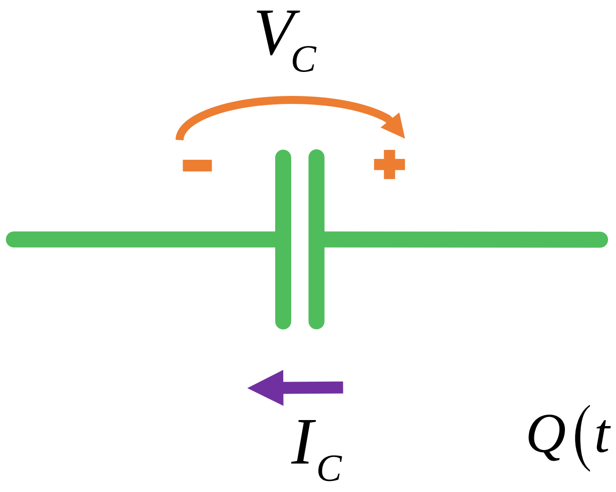
לא מקוטב
(קרמי)



מקוטב
(אלקטרוליטי)



קבל לינארי – נוסחאות



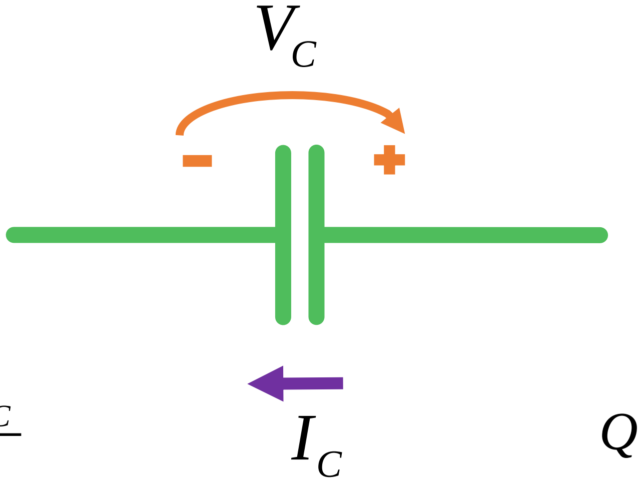
$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$$Q(t) = CV_C(t)$$

Q – מטען

C – קיבול

קבל לינארי – נוסחאות



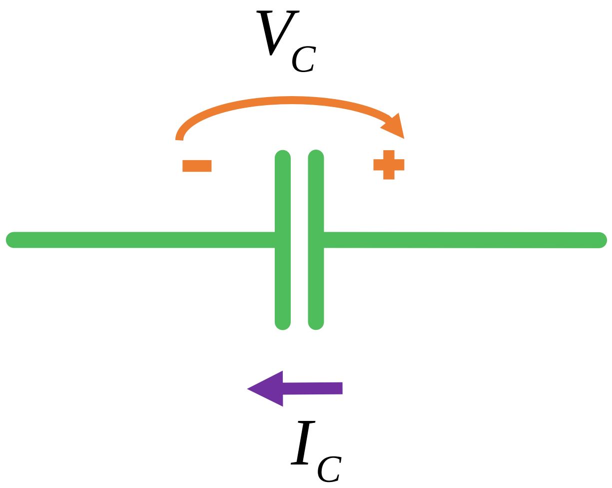
$$\frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$Q = CV_C$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_C(t')\,dt' + V_0$$

הספק ואנרגיה בקבל

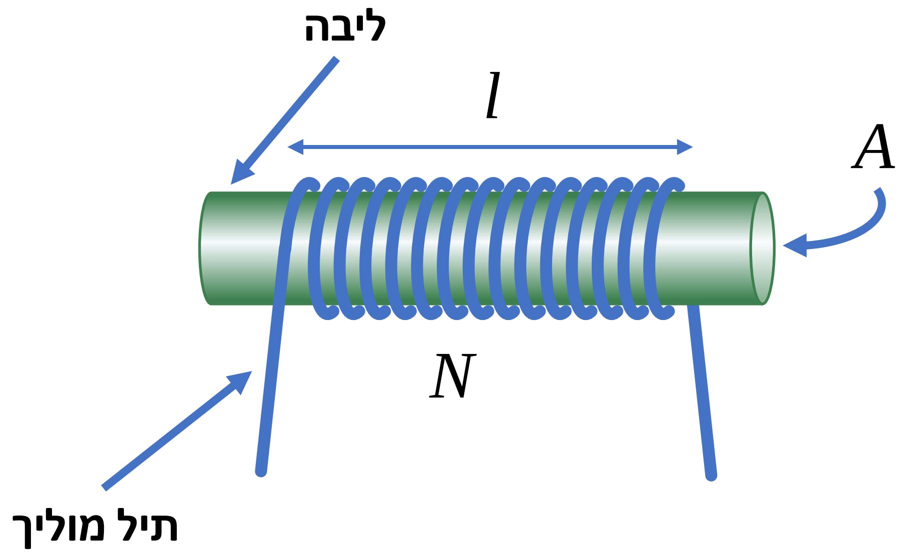


$$P_C(t) = V_C(t) I_C(t)$$

$$W_C(t) = \int_0^t P_C(t') dt' = \int_0^t V_C(t') I_C(t') dt'$$

$$W_C(t) = C \int_0^t V_C(t') \frac{dV_C(t')}{dt} dt' = \frac{1}{2} C V_C^2(t) - \frac{1}{2} C V_C^2(0)$$

סליל או משרן (Inductor)

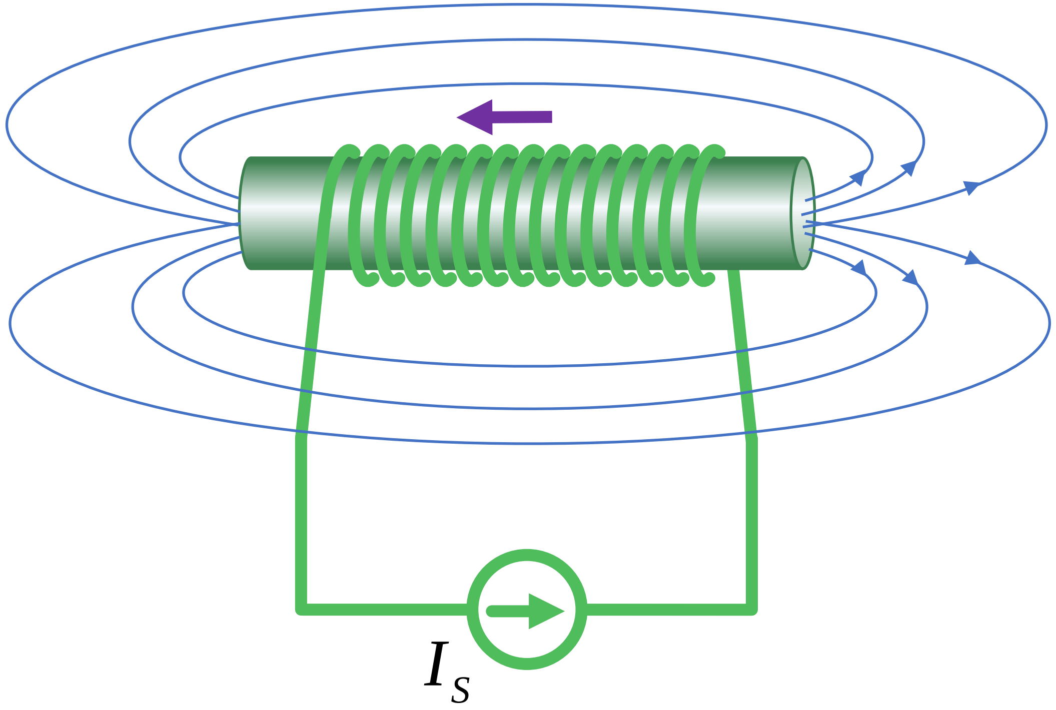


A – שטח הליבה

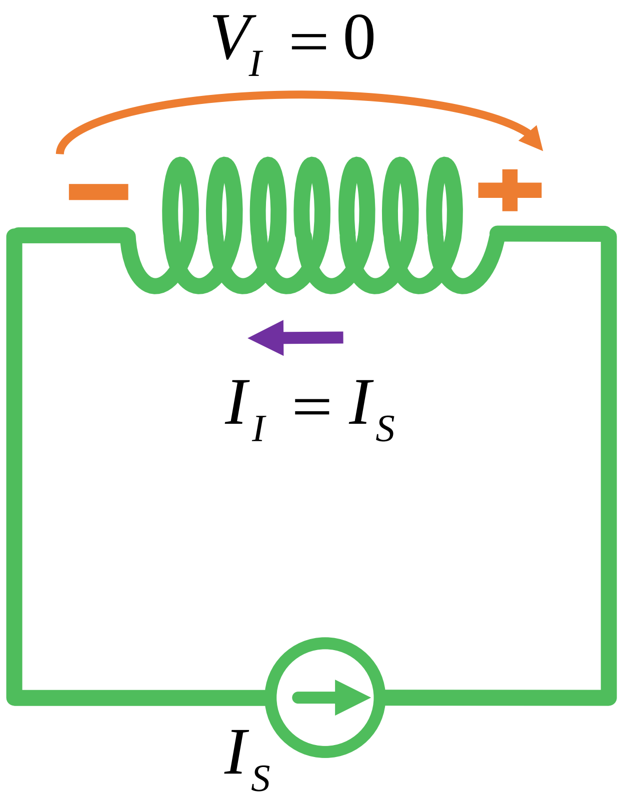
l – אורך הסליל

N – מספר ליפופים

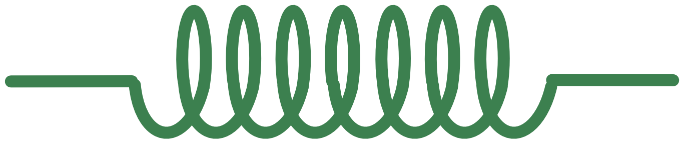
סליל



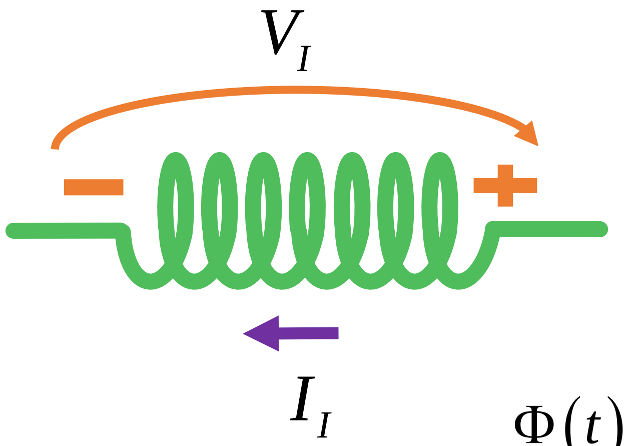
סליל – במעגלי DC



סליל - סימון



סליל לינארי – נוסחאות



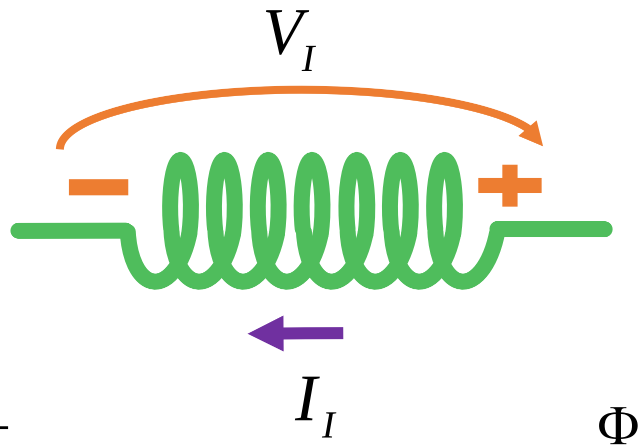
$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

$$\Phi(t) = L I_I(t)$$

Φ – שטף מגנטי

L – השראות

סליל לינארי – נוסחאות



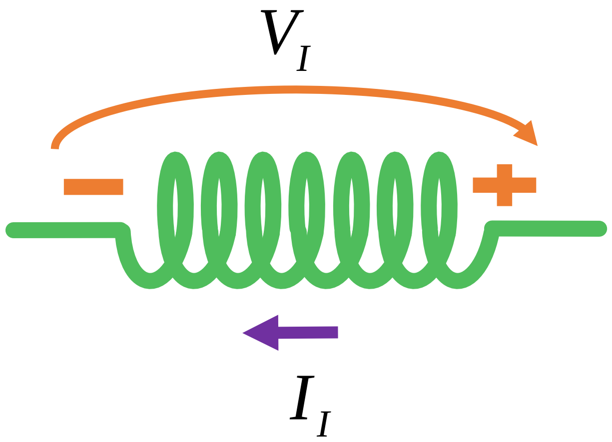
$$\Phi = L I_I$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI_I}{dt}$$

$$V_I = L\frac{dI_I}{dt}$$

$$I_I(t) = \frac{1}{L}\int_0^t V_I(t')\,dt' + I_0$$

הספק ואנרגיה בסליל

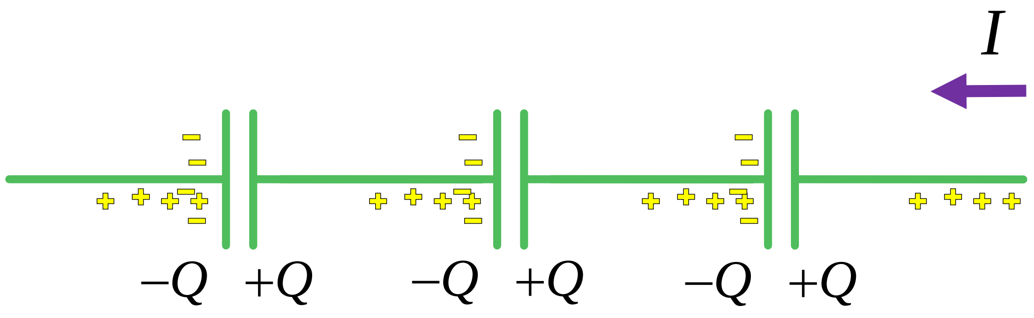


$$P_I(t)=V_I(t)I_I(t)$$

$$W_I(t)=\int_0^t P_I(t')dt'=\int_0^t V_I(t')I_I(t')dt'$$

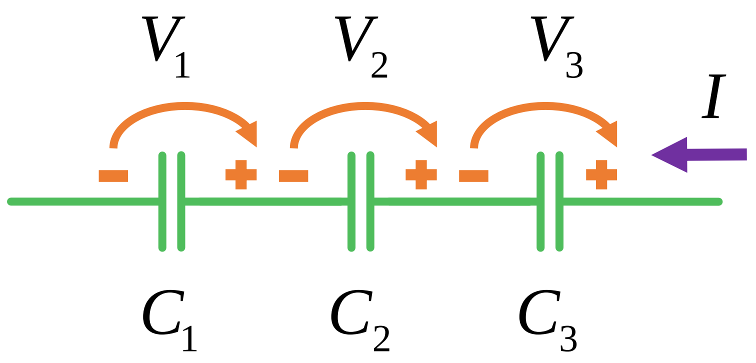
$$W_I(t)=L\int_0^t I_I(t')\frac{dI_I(t')}{dt}dt'=\frac{1}{2}LI_I^2(t)-\frac{1}{2}LI_I^2(0)$$

חיבור בטור של קבלים



המטען בכל הקבלים שווה

חיבור בטור של קבלים

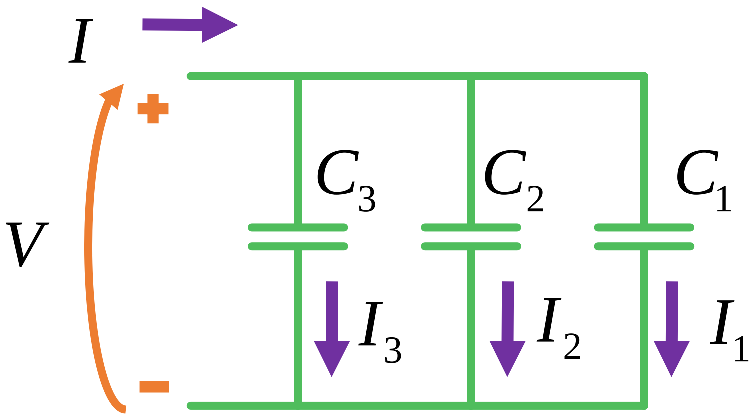


$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2} \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

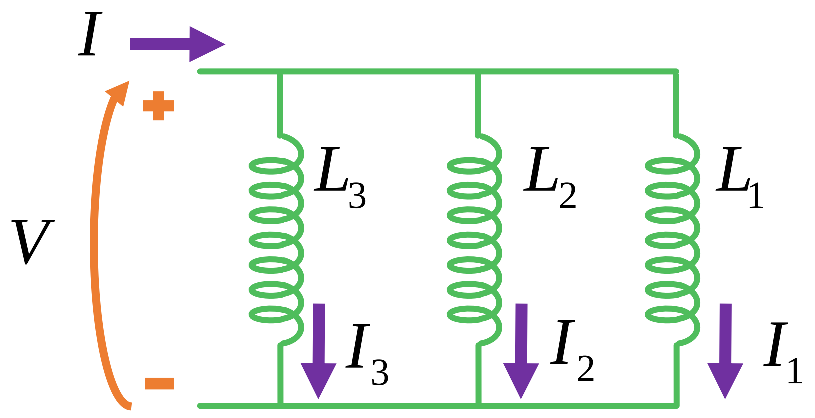
$$\boxed{\frac{1}{C_T} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{C_k}}$$

חיבור במקביל של קבלים



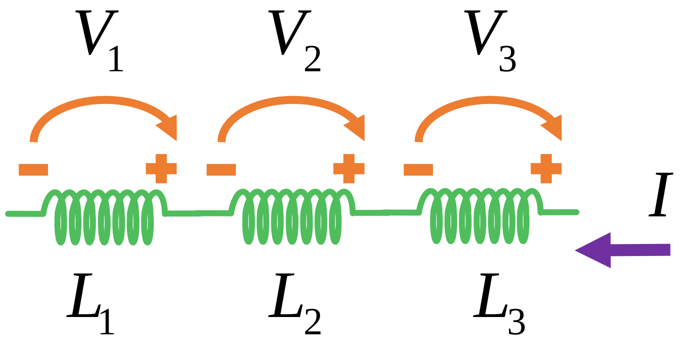
$$I = I_1 + I_2 + I_3 =$$

חיבור במקביל של סלילים



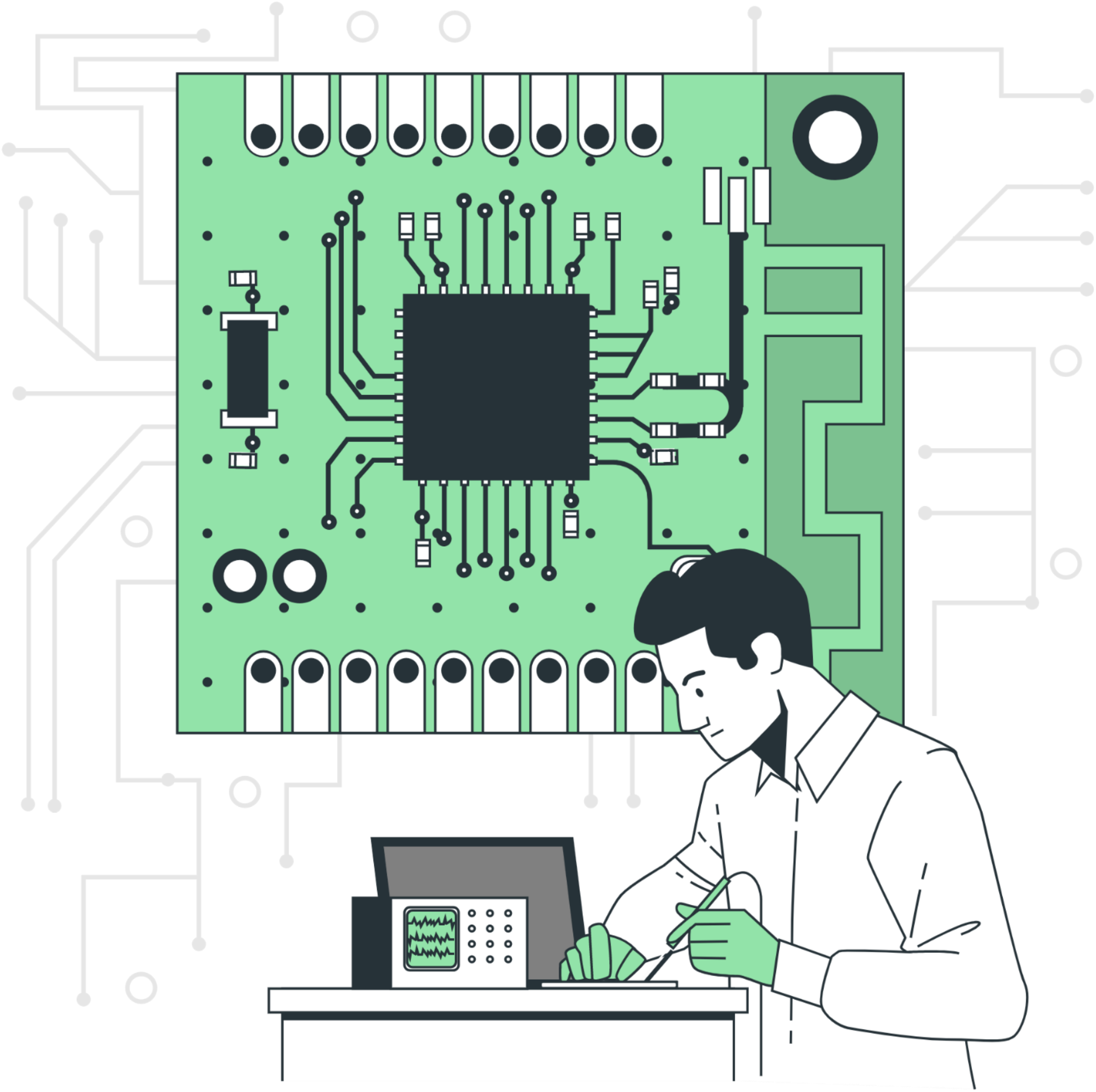
$$\boxed{\frac{1}{L_T}=\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{L_k}}$$

חיבור בטור של סלילים



$$\boxed{L_T = \sum_{k=1}^{M} L_k}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



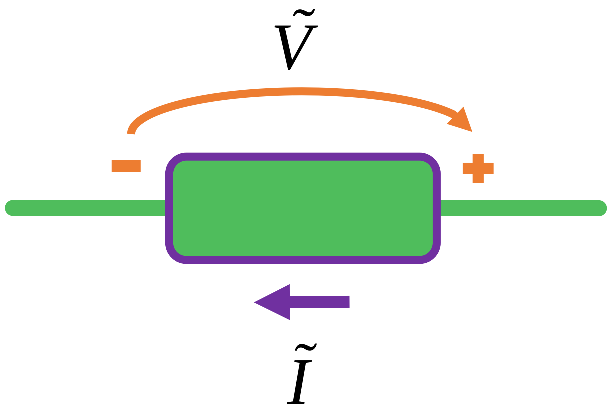
מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 2 : מעגלי זרם חילופין

מקטע 2.4 : עכבה

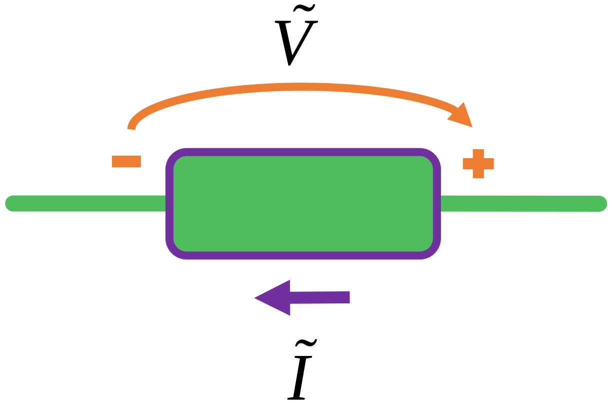
Impedance – עכבה



$$Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}$$

$$Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{\left|\tilde{V}\right|}{\left|\tilde{I}\right|}\angle \phi_V - \phi_I$$

עכבה של נגד

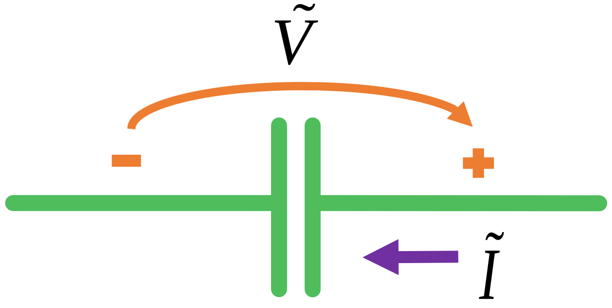


$$i(t) = I\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{I} = Ie^{j\phi}$$

$$v(t) = Ri(t) = RI\cos(\omega t + \phi) \longrightarrow \tilde{V} = RIe^{j\phi}$$

$$Z_R = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = R$$

עכבה של קבל



$$v(t) = V\cos(\omega t + \phi) \rightarrow \tilde{V} = Ve^{j\phi}$$

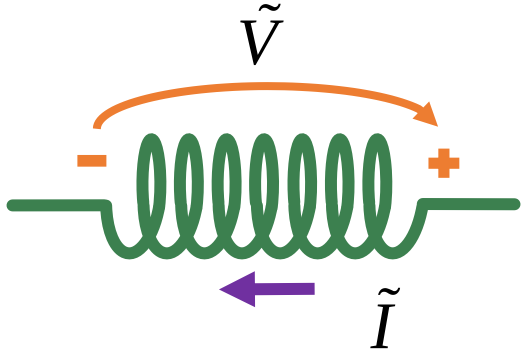
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = -\omega CV\sin(\omega t + \phi)$$

$$i(t) = -\omega CV\cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \tilde{I} = -\omega CVe^{j(\phi - \pi/2)}$$

$$\boxed{Z_C = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{Ve^{j\phi}}{-\omega CVe^{j(\phi-\pi/2)}} = \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{\omega C}e^{-j\pi/2}}$$

עכבה של סליל



$$i(t) = I\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow \tilde{I} = Ie^{j\phi}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\omega LV\sin(\omega t+\phi)$$

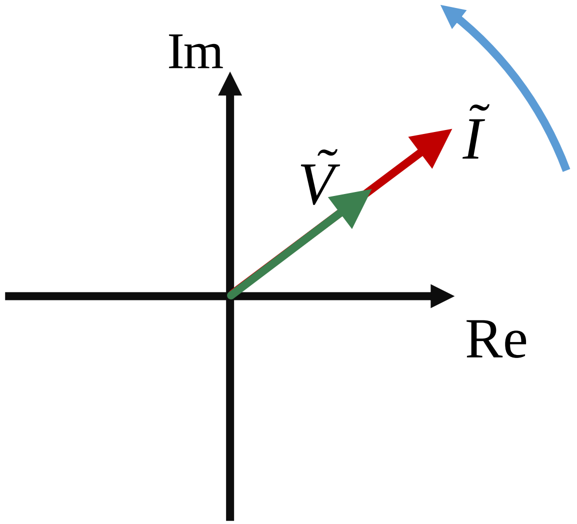
$$v(t) = -\omega LI\cos\left(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \tilde{V} = -\omega LIe^{j(\phi-\pi/2)}$$

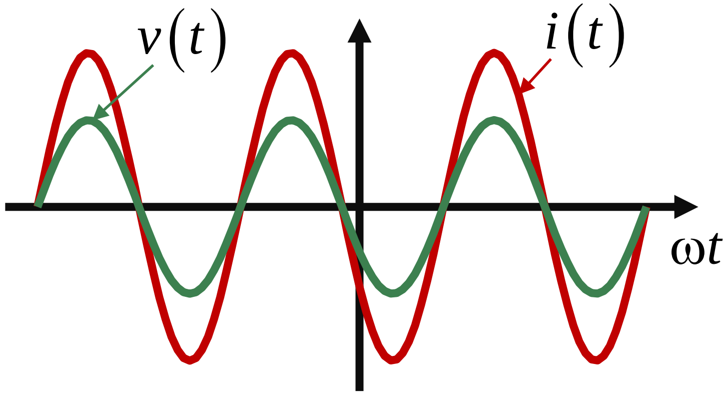
$$\boxed{Z_L = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = \frac{-\omega LIe^{j(\phi-\pi/2)}}{Ie^{j\phi}} = j\omega L} \qquad \boxed{Z_L = \omega Le^{j\pi/2}}$$

מי מקדים את מי?

בנגד:

$$\tilde{V} = R\tilde{I}$$

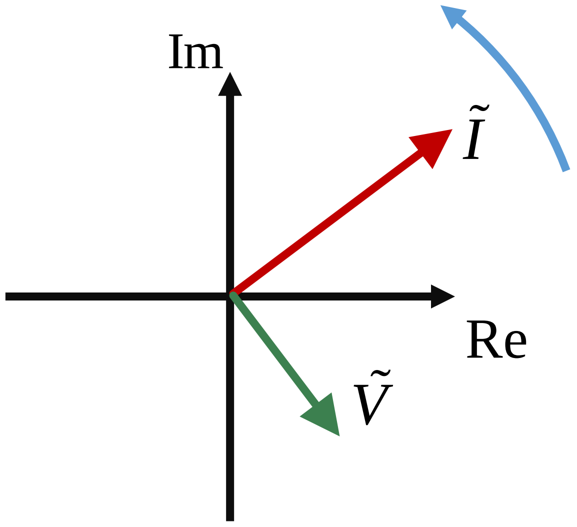


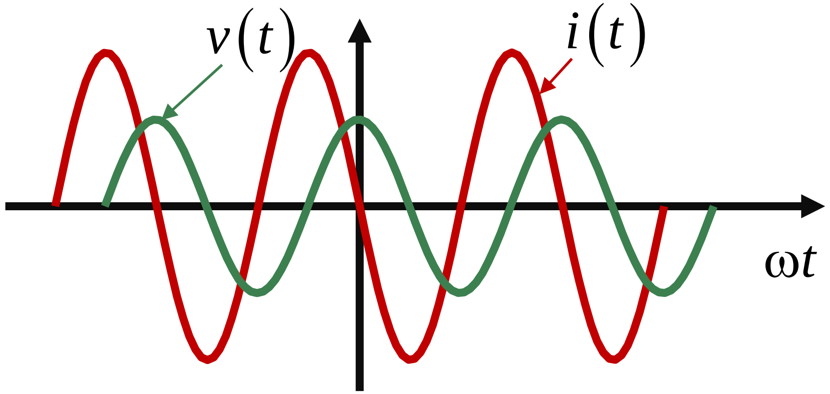


מי מקדים את מי?

בקבל:

$$\boxed{\tilde{V} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}}$$

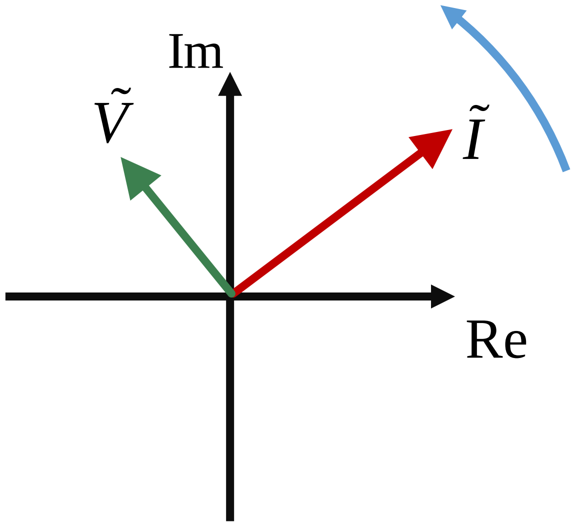


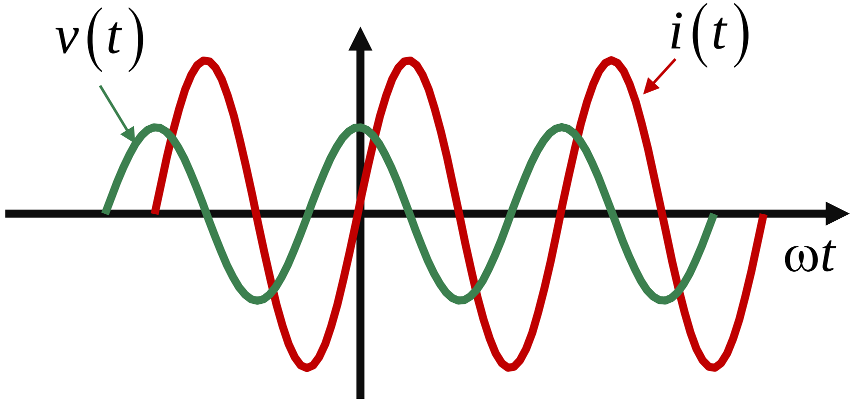


מי מקדים את מי?

בסליל:

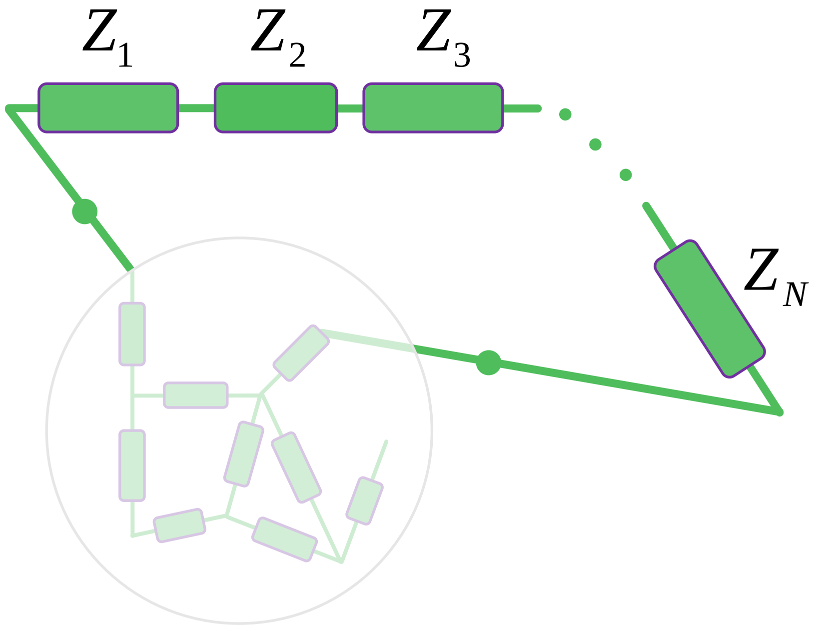
$$\boxed{\tilde{V} = j\omega L \tilde{I}}$$





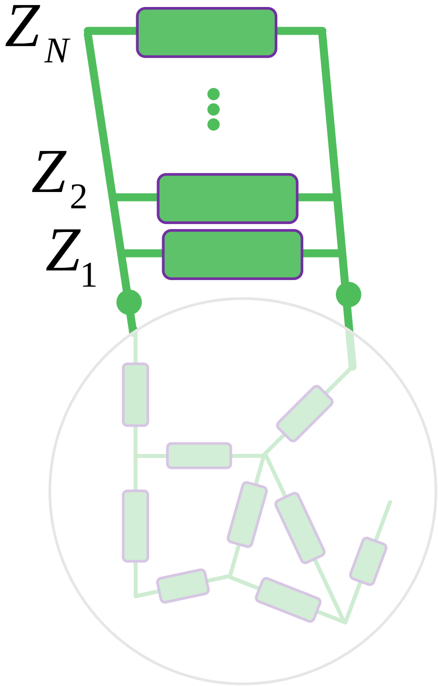
חיבור עכבות בטור

$$Z = \sum_{k=1}^{N} Z_k$$



חיבור עכבות במקביל

$$\frac{1}{Z}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{Z_k}$$



דוגמא

$R = 100\ [\Omega]$ $\quad C = 1\ [\mathrm{mF}]$ $\quad f = 1\ [\mathrm{kHz}]$

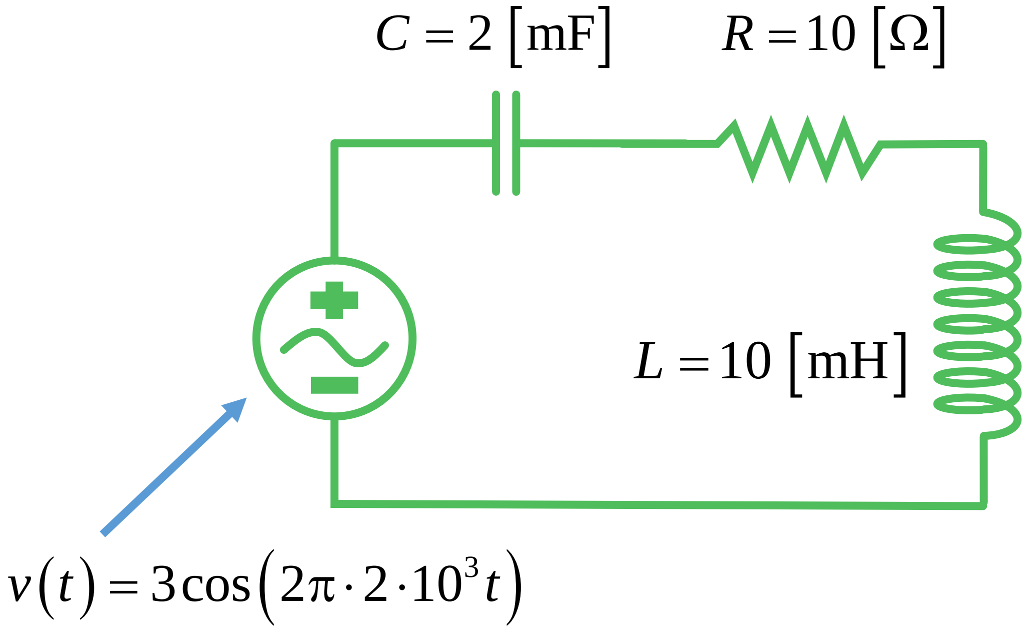
מצא את העכבה השקולה

$$Z_R = R = 100\ [\Omega]$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{2\pi\cdot 10^3\cdot 10^{-3}} = -0.16j\ [\Omega]$$

$$Z_T = 100 - 0.16j\ [\Omega]$$

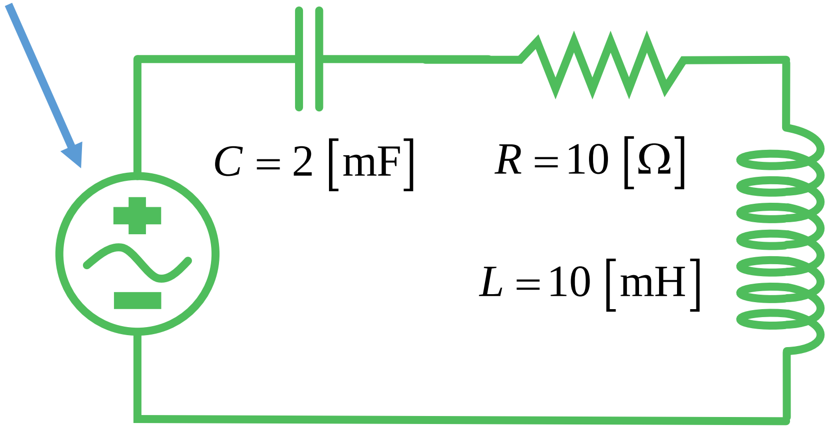
דוגמא נוספת



מצא את המתח על הסליל

נעבור לייצוג פאזורי

$$v(t) = 3\cos\left(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t\right)\,[V]$$



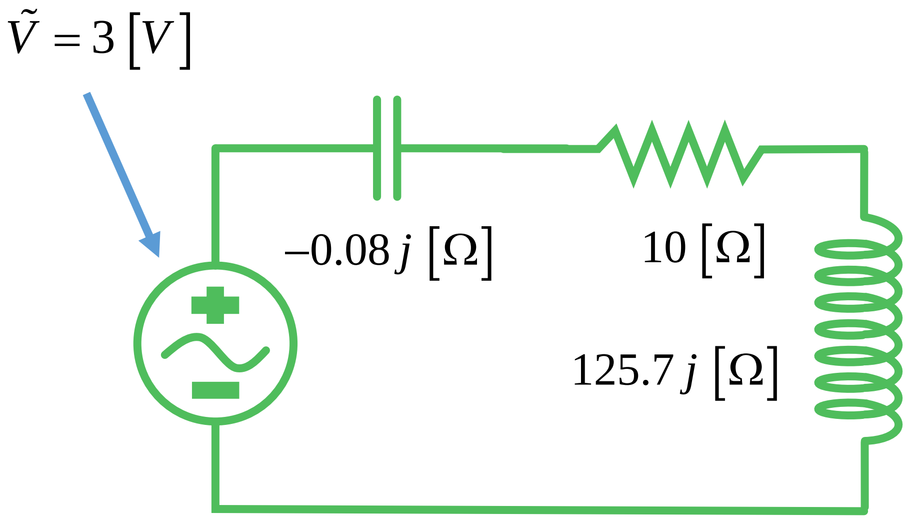
$\tilde{V} = 3\,[V]$ $f = 2\,[\text{kHz}]$

$$Z_R = R = 10\,[\Omega]$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} = -0.08j\,[\Omega]$$

$$Z_L = j2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 125.7j\,[\Omega]$$

ונעשה "מחלק מתח"



$$\tilde{V}_L = 3\frac{125.7j}{10 + j(125.7 - 0.08)} =$$

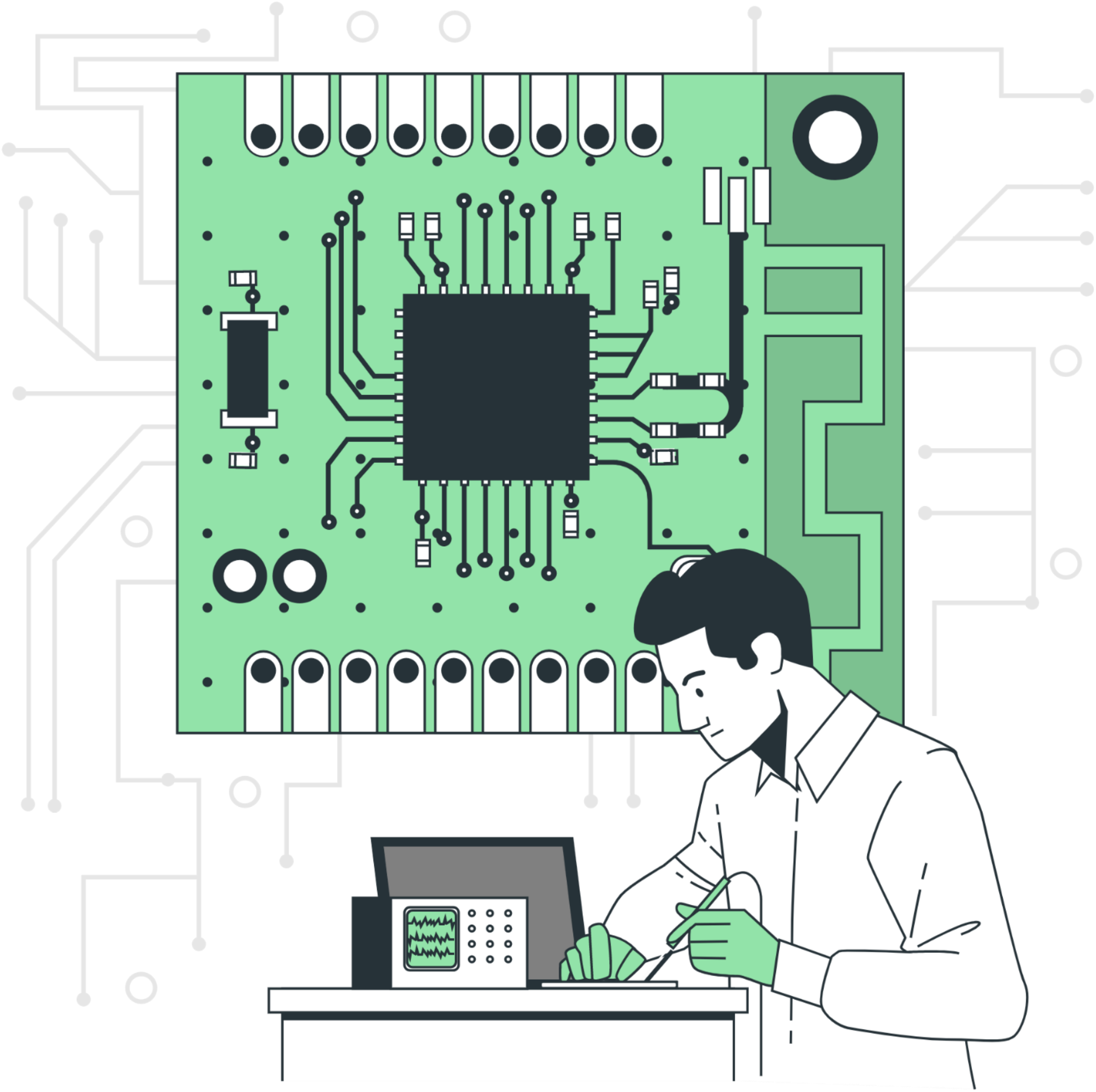
$$\cong 2.98 + j0.24 \cong 3\angle 0.08\ [V]$$

$$v_L(t) = 3\cos\left(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 t + 0.08\right)\ [V]$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל



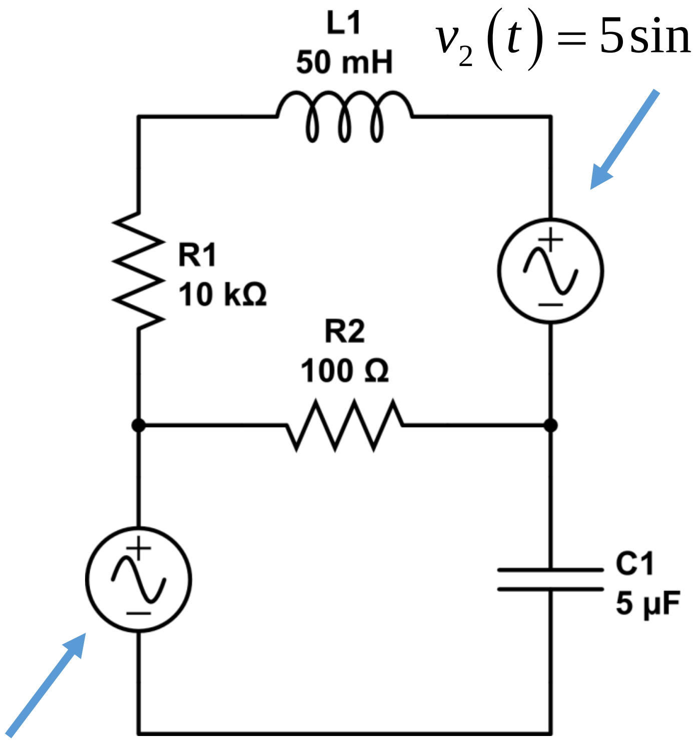
יחידה 2 : מעגלי זרם חילופין

מקטע 2.5 : פתרון מעגלי זרם חילופין ועוד קצת על הספק

דוגמא

מצא את כל הזרמים במעגל

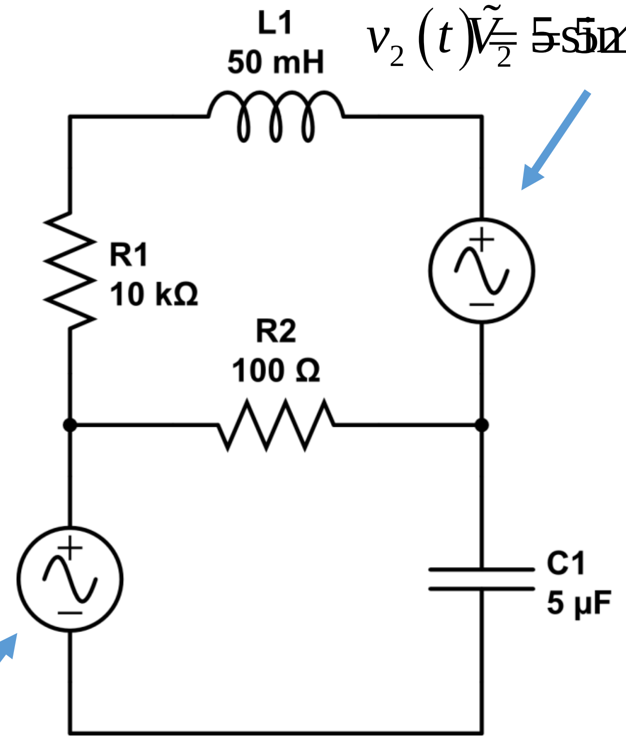
$$v_2(t) = 5\sin\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$$



$$v_1(t) = 2\sin\left(2\pi \cdot 10^3 t + \pi/6\right)$$

נעבור לייצוג פאזורי

$v_2(t) = 5\sin\left(2\pi \cdot 10^3 t\right)$ $\qquad \tilde{V}_2 = 5\angle -\pi/2$



$v_1(t) = 2\sin\left(2\pi \cdot 10^3 t + \pi/6\right)$ $\qquad \tilde{V}_1 = 2\angle -2\pi/6$

נחשב עכבות

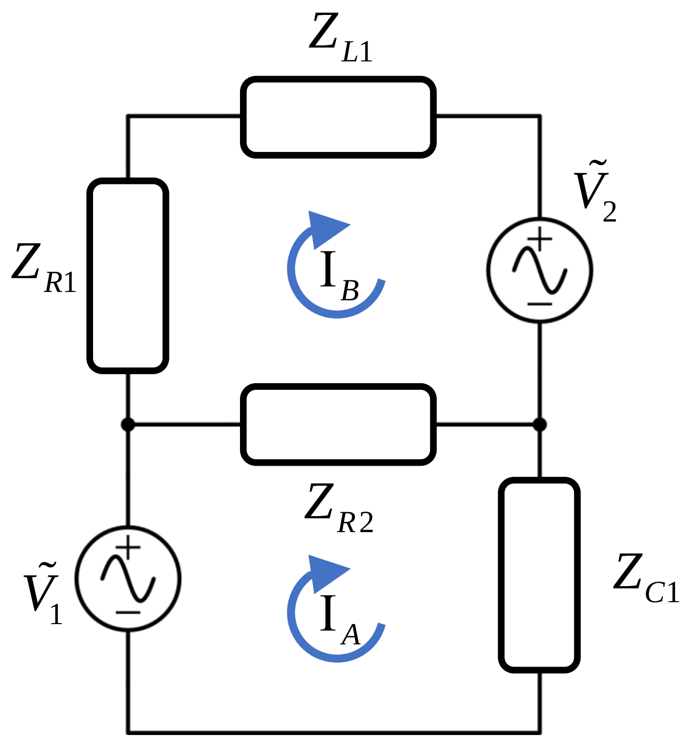
$$Z_{R1} = R_1 = 10^4 \ [\Omega]$$

$$Z_{R2} = R_2 = 100 \ [\Omega]$$

$$Z_{C1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j2\pi \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = -31.83j \ [\Omega]$$

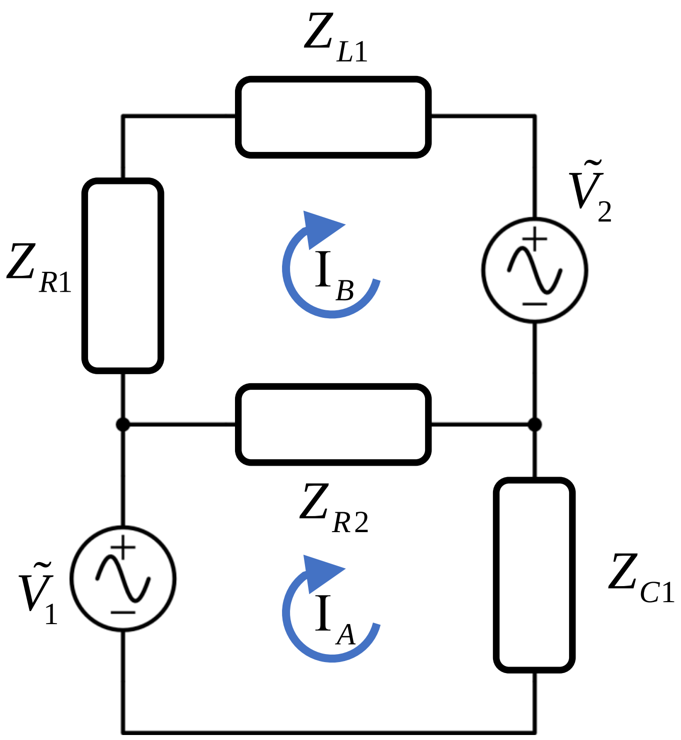
$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j2\pi \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 314.16j \ [\Omega]$$

ונפתור בשיטת זרמי חוגים



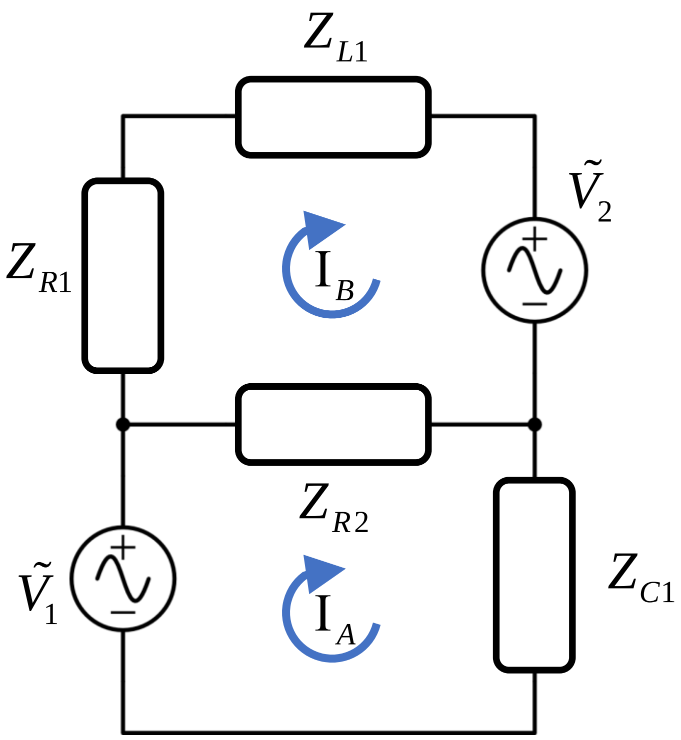
$$\begin{bmatrix} Z_{R2}+Z_{C1} & -Z_{R2} \\ -Z_{R2} & Z_{R1}+Z_{R2}+Z_{L1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ -\tilde{V}_2 \end{bmatrix}$$

ונפתור בשיטת זרמי חוגים



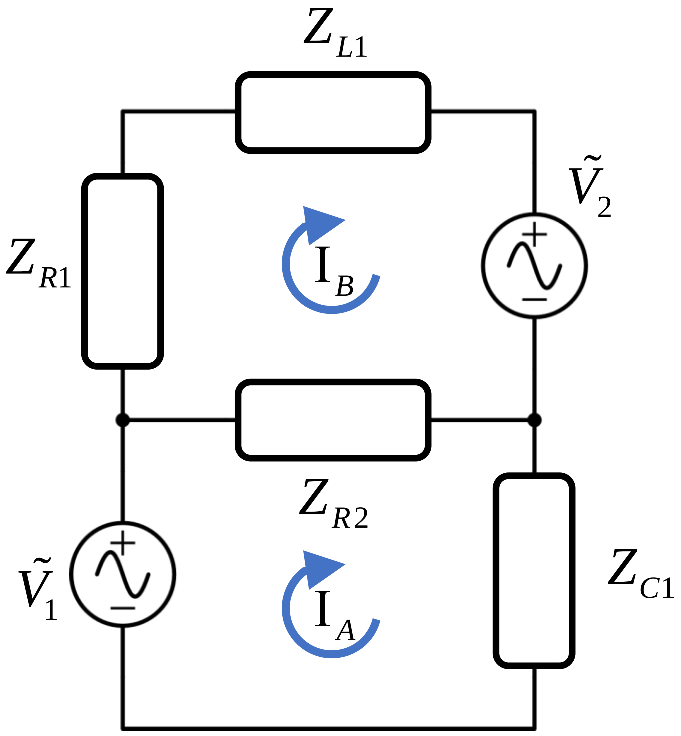
$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{R2} + Z_{C1} & -Z_{R2} \\ -Z_{R2} & Z_{R1} + Z_{R2} + Z_{L1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 \\ -\tilde{V}_2 \end{bmatrix}$$

ונפתור בשיטת זרמי חוגים



$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100-31.83j & -100 \\ -100 & 10100+314.16j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2\angle -2\pi/6 \\ 5\angle \pi/2 \end{bmatrix}$$

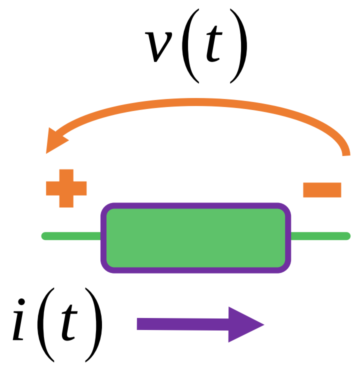
ונפתור בשיטת זרמי חוגים



$$I_A = 18.8\angle -0.723\ [\mathrm{mA}]$$

$$I_B = 0.4\angle 1.18\ [\mathrm{mA}]$$

הספק במעגלי AC במצב מתמיד



הספק רגעי

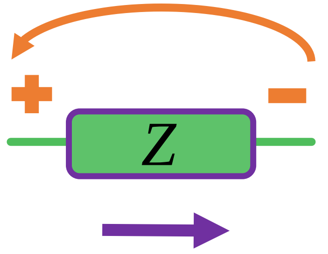
$$p(t) = v(t)i(t)$$

הספק ממוצע

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t')dt' = \frac{1}{T}\int_0^T v(t')i(t')dt'$$

הספק במעגלי AC במצב מתמיד

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_V)$$



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_I)$$

הספק רגעי

$$p(t) = v(t)i(t) =$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)}_{\text{קבוע בזמן}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \phi_V + \phi_I)}_{\text{משתנה בזמן}}$$

הזווית של העכבה ← θ

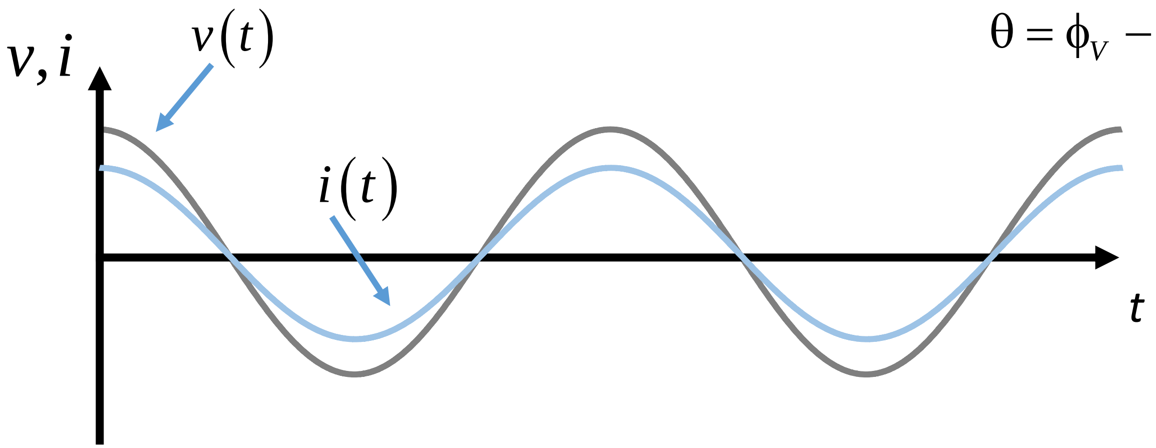
$$\boxed{\cos(\underbrace{\alpha}_{\theta})\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)}$$

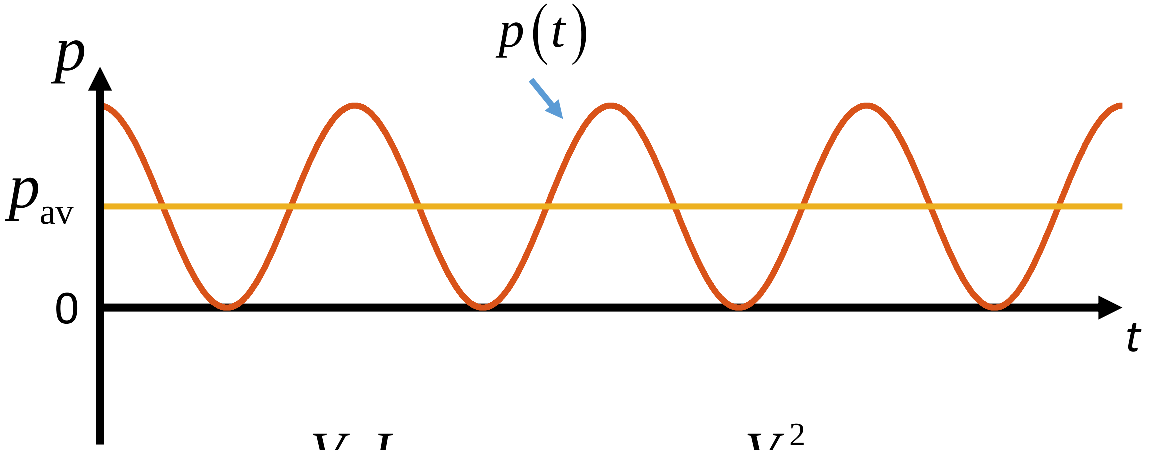
הספק ממוצע

$$P_{\text{avg}} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)$$

הספק במעגלי AC - נגד

$$\theta = \phi_V - \phi_I = 0$$



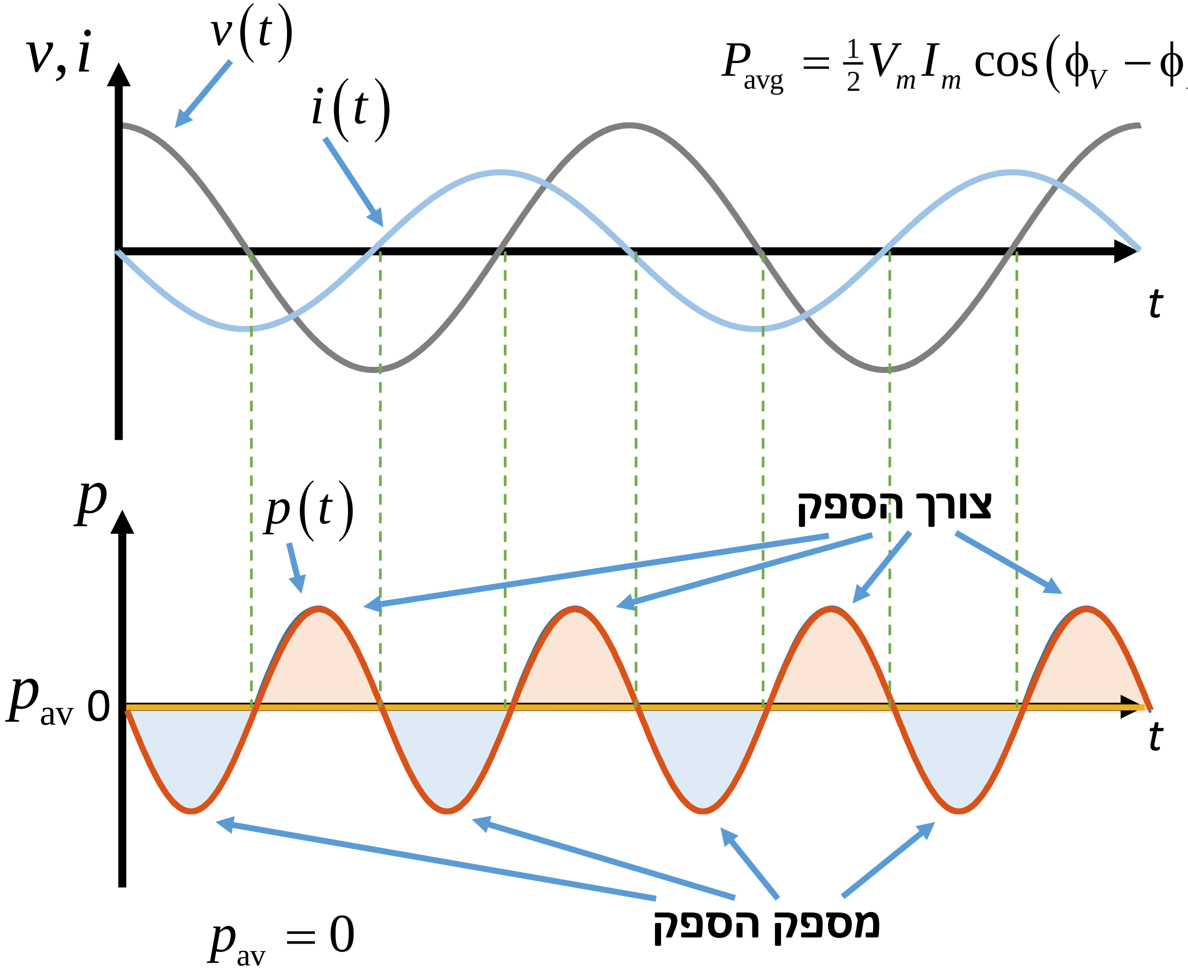


$$p_{\text{av}} = \frac{V_m I_m}{2} = V_{\text{RMS}} I_{\text{RMS}} = \frac{V_{\text{RMS}}^2}{R} = I_{\text{RMS}}^2 R$$

הספק במעגלי AC – קבל

$$\theta = \phi_V - \phi_I = -\pi/2$$

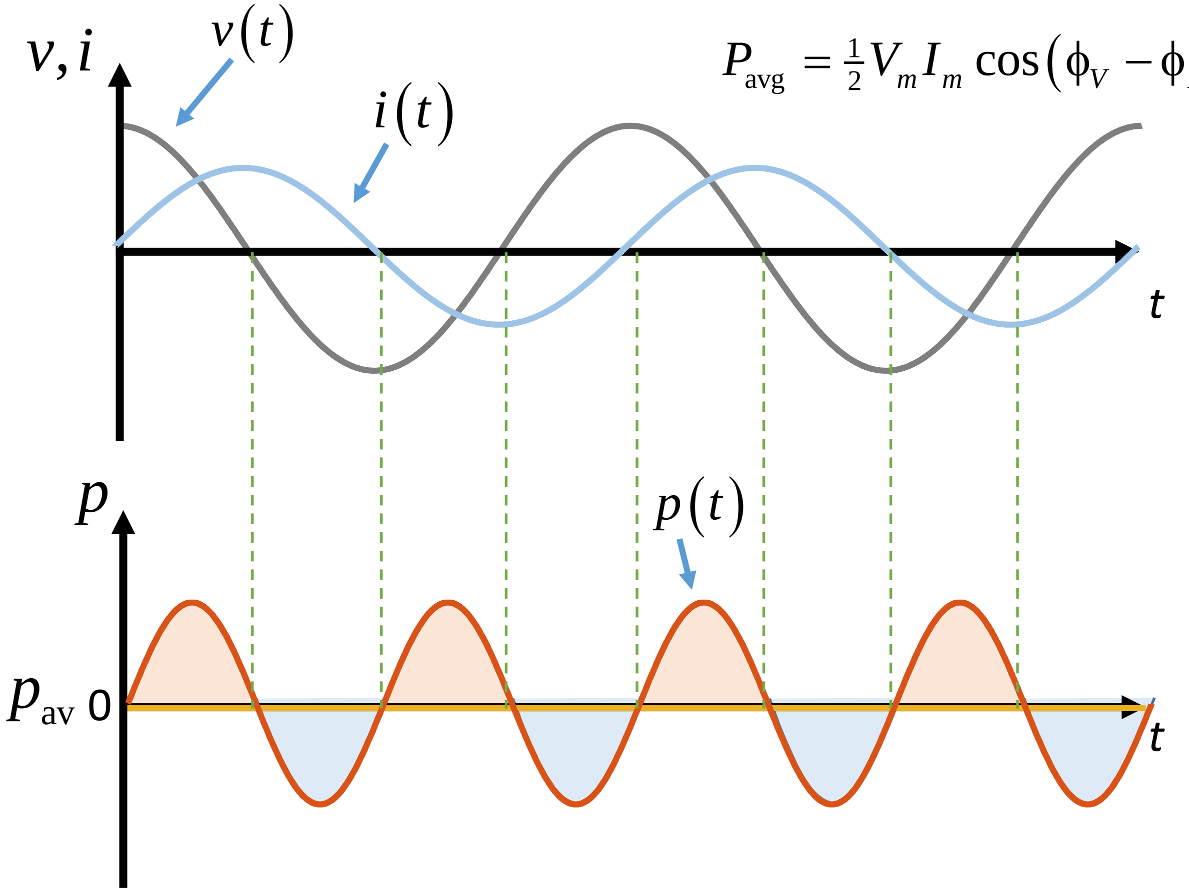
$$P_{\text{avg}} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I) = 0$$



הספק במעגלי AC – סליל

$$\theta = \phi_V - \phi_I = \pi/2$$

$$P_{avg} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I) = 0$$

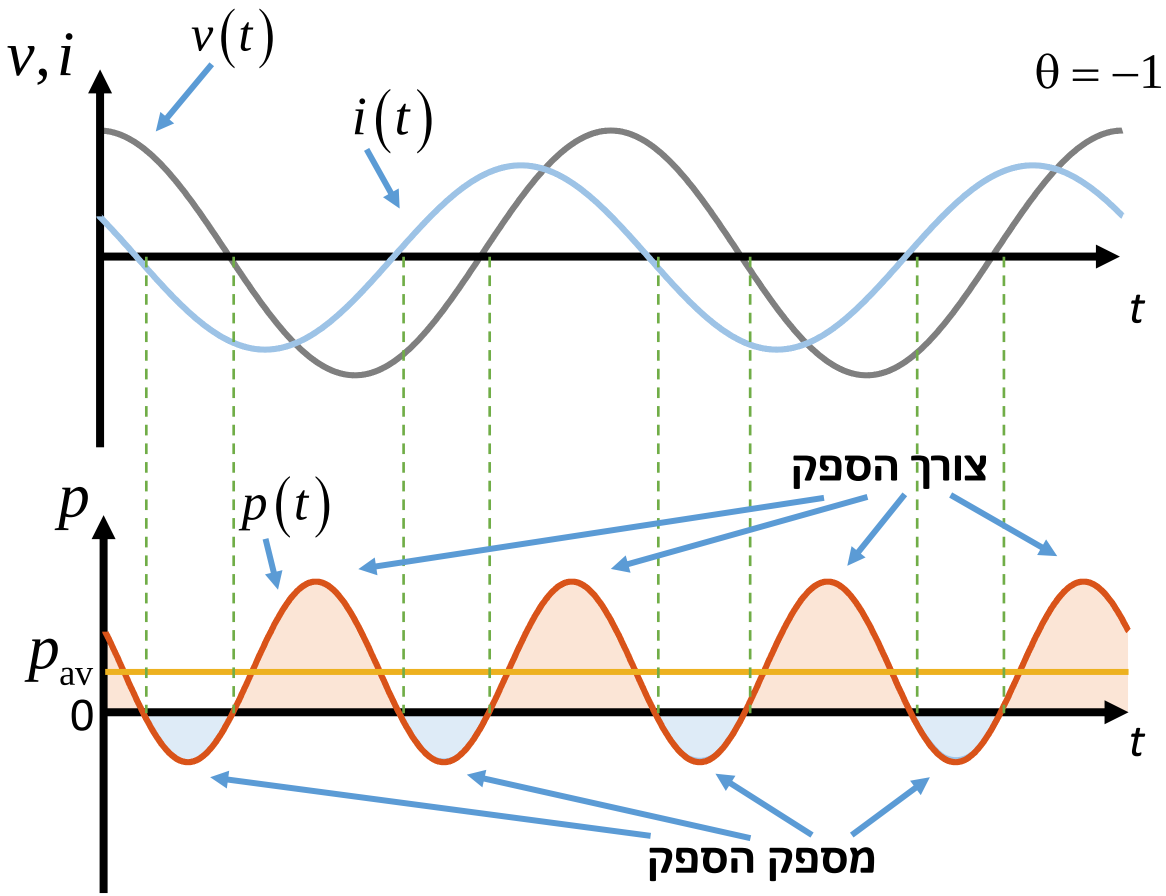


$$p_{av} = 0$$

הספק במעגלי AC – מקרה כללי

$Z = 1 - 2j\ [\Omega]$

$\theta = -1.1\ \text{rad}$



$$P_{\text{avg}} = \tfrac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I) = \text{Re}\left\{\tilde{V}_{\text{RMS}} \tilde{I}^*_{\text{RMS}}\right\}$$

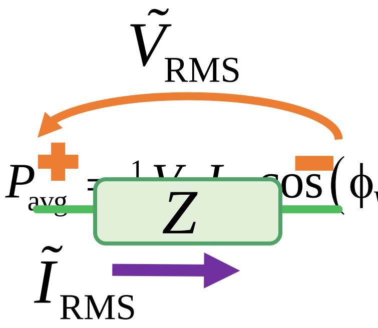
הספק במעגלי AC – מקדם ההספק

$$P_{avg} = \frac{1}{2} V_m I_m \overbrace{\cos\underbrace{\left(\phi_V - \phi_I\right)}_{\theta}}^{\text{מקדם ההספק}} = \mathrm{Re}\left\{\tilde{V}_{\mathrm{RMS}} \tilde{I}^*_{\mathrm{RMS}}\right\}$$

θ ← הזווית של העכבה

$$Z = |Z| e^{j\theta} = Z\angle\theta$$

הספק מרוכב



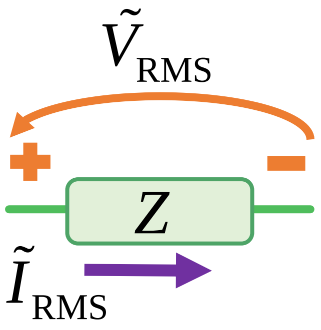
$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{2} V I \cos\left(\phi_V - \phi_I\right) = \text{Re}\left\{\tilde{V}_{\text{RMS}} \tilde{I}^*_{\text{RMS}}\right\}$$

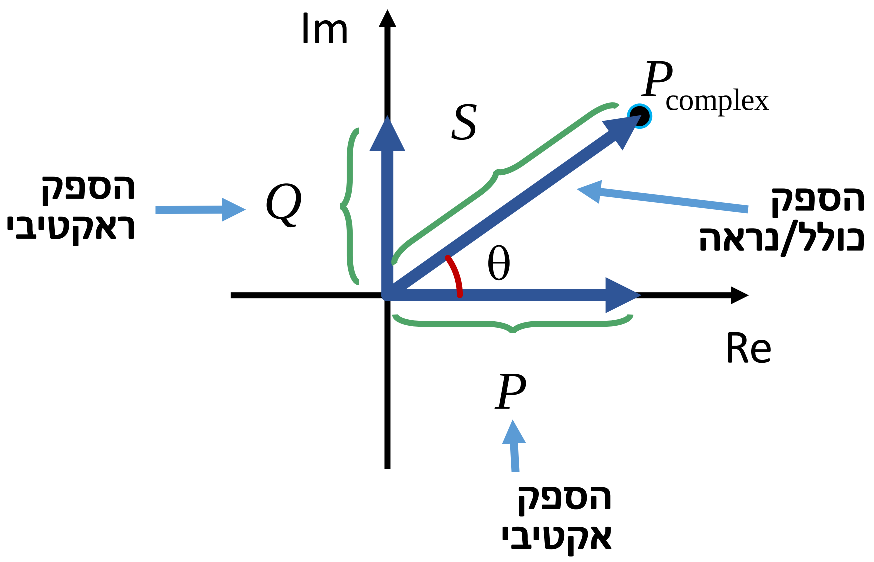
$$\tilde{V}_{\text{RMS}} = \tilde{I}_{\text{RMS}} Z$$

$$\boxed{P_{\text{complex}} = \tilde{V}_{\text{RMS}} \tilde{I}^*_{\text{RMS}}} \quad \boxed{P_{\text{complex}} = \left|\tilde{I}_{\text{RMS}}\right|^2 Z} \quad \boxed{P_{\text{complex}} = \frac{\left|\tilde{V}_{\text{RMS}}\right|^2}{Z^*}}$$

הספק מרוכב

$$\theta = \phi_V - \phi_I$$

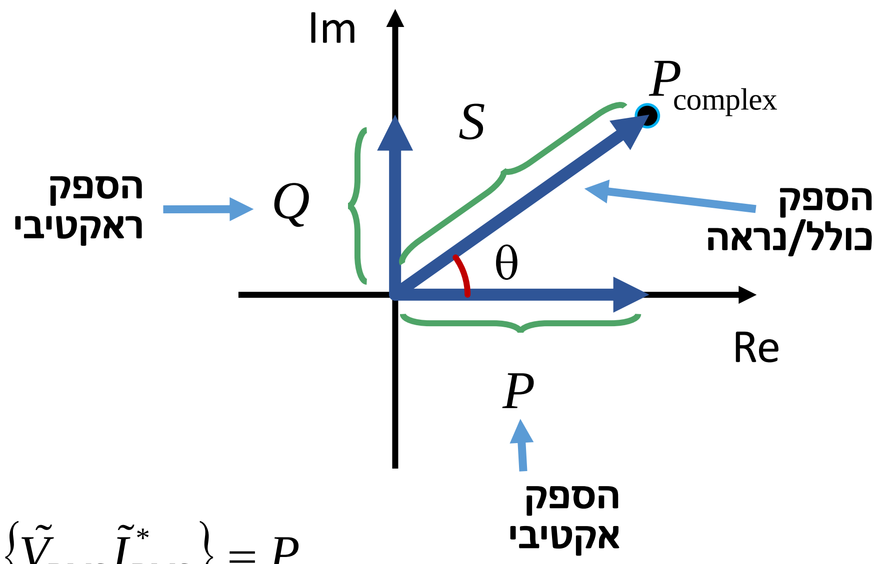




$$P_{\text{complex}} = \tilde{V}_{\text{RMS}}\tilde{I}^*_{\text{RMS}} = \left|\tilde{I}_{\text{RMS}}\right|^2 Z = \frac{\left|\tilde{V}_{\text{RMS}}\right|^2}{Z^*}$$

הספק מרוכב

$$\theta = \phi_V - \phi_I$$



$$P = \mathrm{Re}\left\{P_{\text{complex}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\tilde{V}_{\text{RMS}}\tilde{I}^*_{\text{RMS}}\right\} = P_{\text{avg}}$$

$$Q = \mathrm{Im}\left\{P_{\text{complex}}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\tilde{V}_{\text{RMS}}\tilde{I}^*_{\text{RMS}}\right\}$$

$$S = \left|P_{\text{complex}}\right| = \left|\tilde{V}_{\text{RMS}}\tilde{I}^*_{\text{RMS}}\right| = \sqrt{P^2 + Q^2}$$