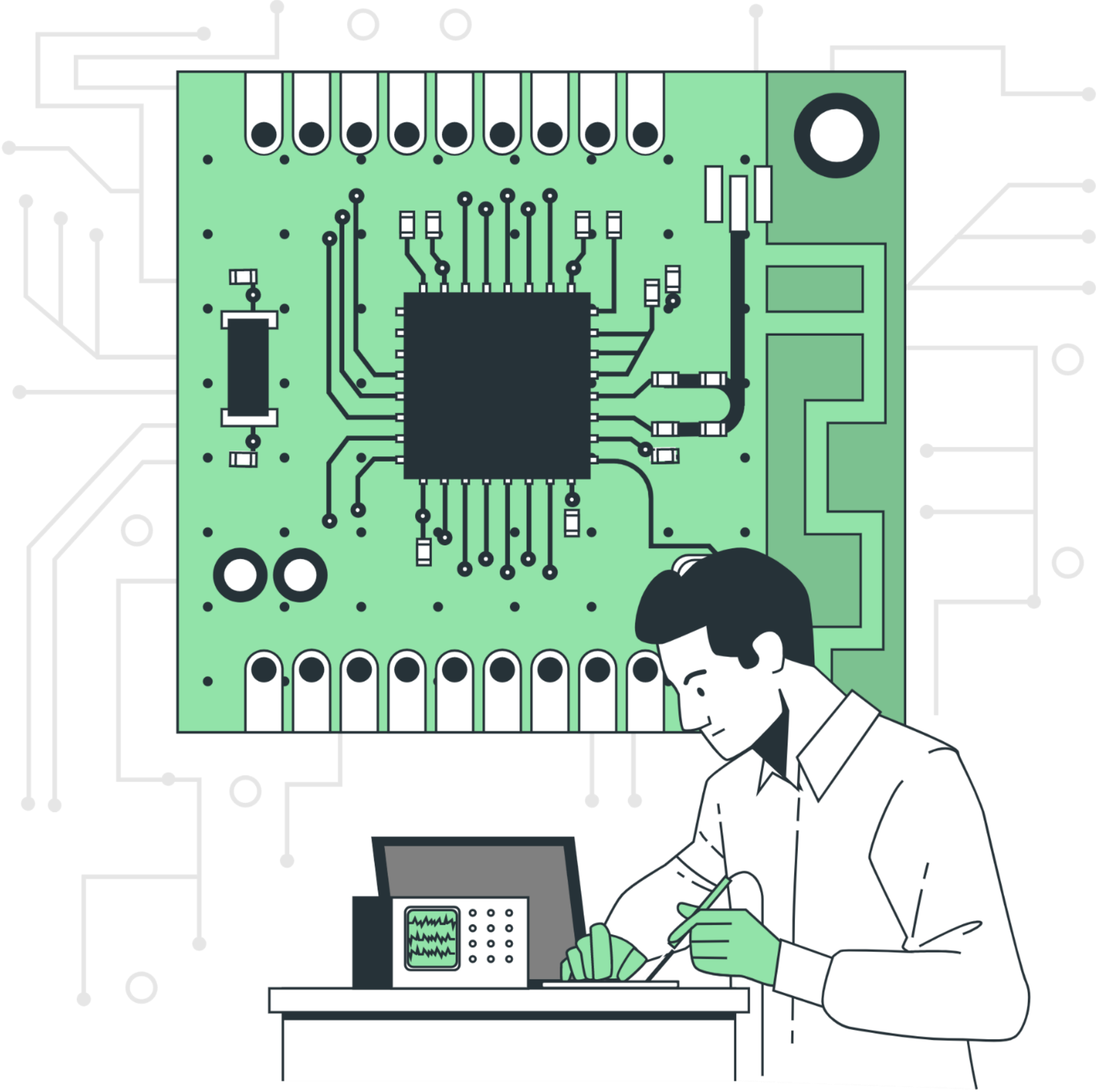
VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 7 : ייצוג מערכת במרחב המצב

מקטע 7.1 : משתני מצב

שיטות לייצוג מערכות:

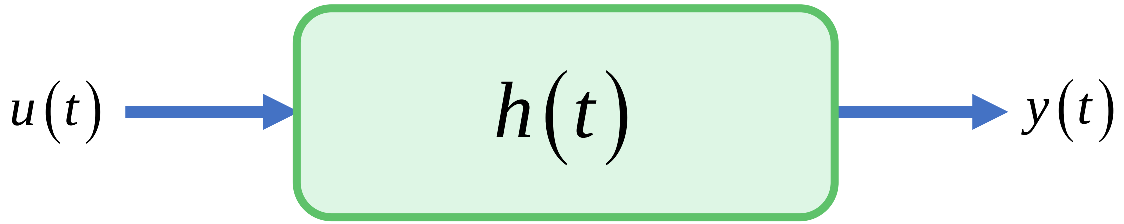
1. מד"ר + תנאי התחלה
2. התגובה להלם + קונבולוציה
3. פונקציית התמסורת (התמרת לפלס)
4. תגובת התדר (עקומות בודה)
5. ייצוג במרחב המצב (משתני מצב)

סוגי מערכות

SISO – Single Input Single Output

MIMO – Multiple Input Multiple Output

ייצוג במרחב המצב - הגדרות



- **מצב המערכת (State):** מידע לגבי המערכת ברגע נתון אשר, בהינתן הכניסה למערכת, מאפשר לחזות את המוצא שלה, בכל זמן, מאותו רגע ואילך.

- **משתני מצב (State Variables):** קבוצה המינימלית של משתנים הקובעים באופן מלא את מצב המערכת.

הערה: ביחידה הזו הסימון u(t) אינו מתייחס לפונקציית מדרגה דווקא אלא לאות כניסה כלשהו.

ייצוג במרחב המצב - הגדרות

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$

כאשר:

$\vec{X}(t)$ וקטור משתני מצב ($n\times 1$)

$u(t)$ אות הכניסה

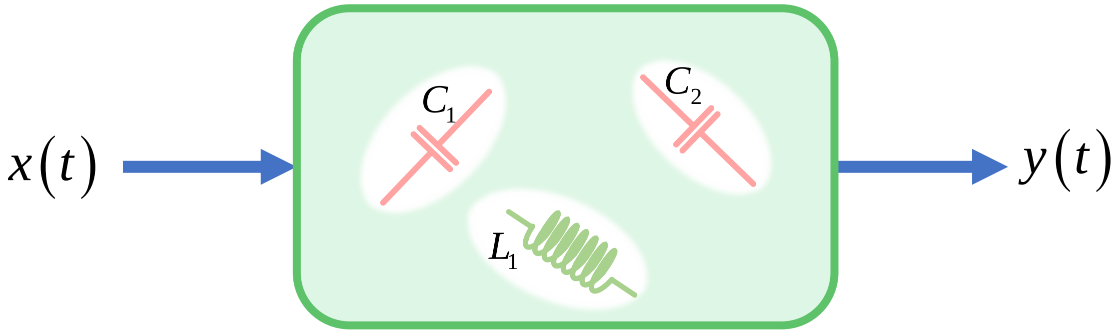
$y(t)$ אות המוצא

$\mathbf{A}$ מטריצת מקדמים ($n\times n$)

$\vec{B}, \vec{C}$ ווקטורי מקדמים ($n\times 1$)

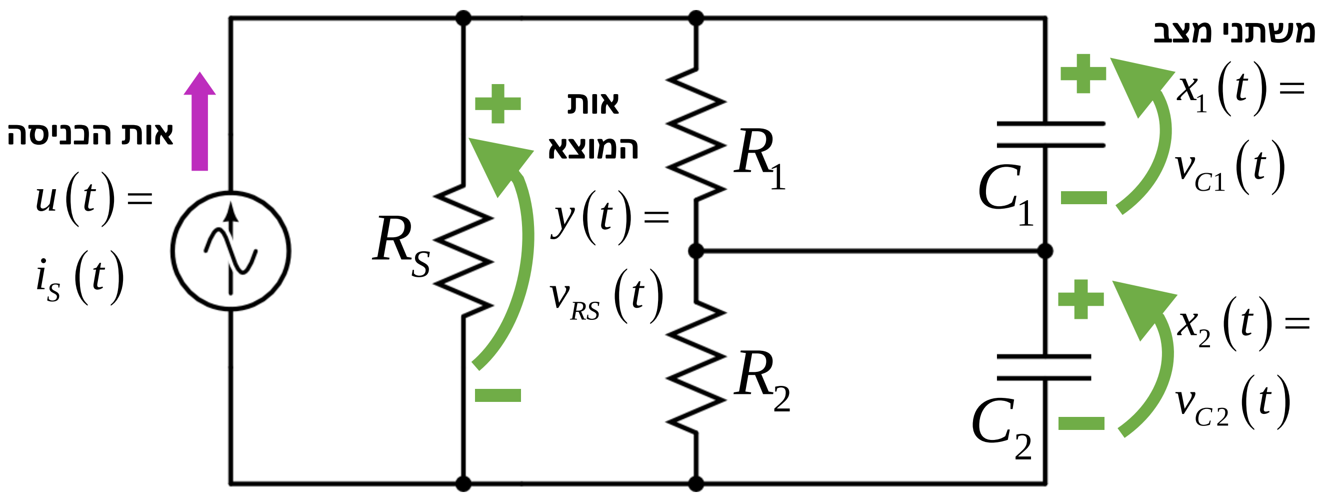
D מקדם

דוגמא למשתני מצב



נגדיר את משתני המצב כמתחי הקבלים וזרמי הסלילים

בואו נראה דוגמא:



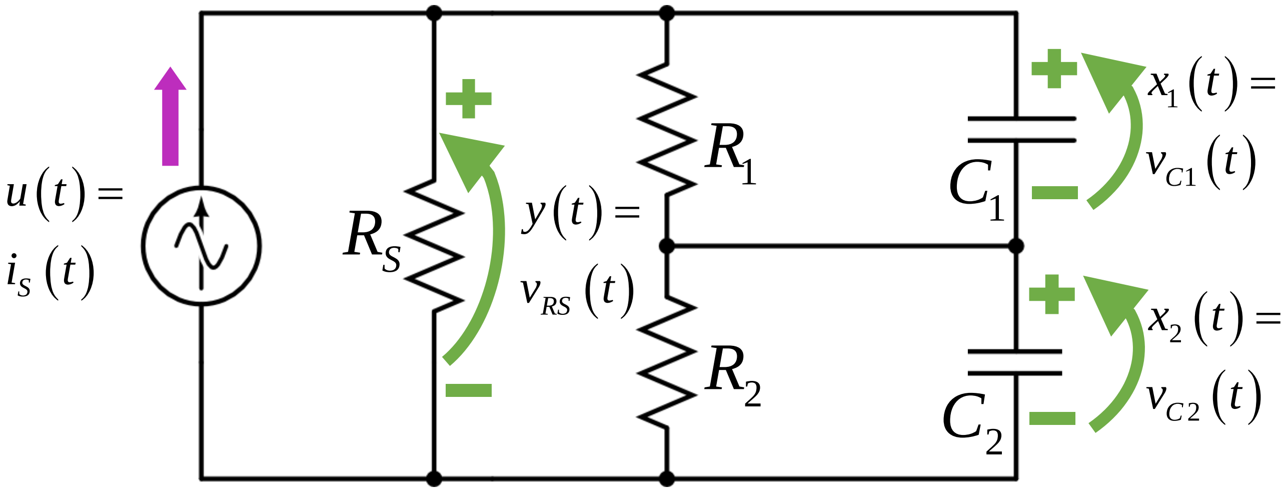
כניסה: $u(t) = i_S(t)$

מוצא: $y(t) = v_{RS}(t)$

משתני מצב: $\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \end{bmatrix}$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} v_{C1}(0) \\ v_{C2}(0) \end{bmatrix}$

נרשום את משוואות המעגל:



ראשית נרשום:

$$i_{C1}(t)=C_1\frac{d}{dt}v_{C1}(t) \qquad i_{C2}(t)=C_2\frac{d}{dt}v_{C2}(t)$$

נרשום משוואות KCL:

$$C_1\frac{d}{dt}v_{C1}=-\frac{v_{C1}+v_{C2}}{R_S}-\frac{v_{C1}}{R_1}+i_S$$

$$C_2\frac{d}{dt}v_{C2}=-\frac{v_{C1}+v_{C2}}{R_S}-\frac{v_{C2}}{R_2}+i_S$$

משוואת המצב:

$$C_1 \frac{d}{dt} v_{C1} = -\frac{v_{C1} + v_{C2}}{R_S} - \frac{v_{C1}}{R_1} + i_S$$

$$C_2 \frac{d}{dt} v_{C2} = -\frac{v_{C1} + v_{C2}}{R_S} - \frac{v_{C2}}{R_2} + i_S$$

נרשום בעזרת ווקטורים ומטריצות:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{dv_{C1}}{dt} \\ \dfrac{dv_{C1}}{dt} \end{bmatrix}}_{\frac{d\vec{X}}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_S} + \dfrac{1}{R_1}\right) & -\dfrac{1}{R_S C_1} \\ -\dfrac{1}{R_S C_2} & -\dfrac{1}{C_2}\left(\dfrac{1}{R_S} + \dfrac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}}_{\vec{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ \dfrac{1}{C_2} \end{bmatrix}}_{\vec{B}} \underbrace{i_S}_{u}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

משוואת המוצא:

$$v_{RS} = v_{C1} + v_{C2}$$

$$\begin{array}{ccc} v_{RS} = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} \\ y & \vec{C} & \vec{X} \end{array}$$

$$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

האם ההצגה היא יחידה?

משוואת המצב: $$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)+\vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה: $$\vec{X}(0)=\vec{X}_0$$

משוואת המוצא: $$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+Du(t)$$

תשובה: לא, אנחנו יכולים למצוא אינסוף וקטורי מצב והצגות אקוויולנטיות.

נעשה זאת בעזרת טרנספורמציה ליניארית:

$$\vec{X}(t)=\mathbf{T}\tilde{X}(t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{X}(t)=\mathbf{T}^{-1}\vec{X}(t)$$

הצגות חלופיות

נציב במשוואת המצב:

$$\vec{X}(t) = \mathbf{T}\tilde{X}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

מקבלים:

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t) = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\tilde{X}(t) + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\vec{B}}_{\tilde{B}}u(t)$$

נציב במשוואת תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

$$\tilde{X}(0) = \mathbf{T}^{-1}\vec{X}(0) = \mathbf{T}^{-1}\vec{X}_0 = \tilde{X}_0$$

הצגות חלופיות

נציב במשוואת המוצא:

$$\vec{X}(t) = \mathbf{T}\tilde{X}(t)$$

$$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

מקבלים:

$$y(t) = \underset{\tilde{C}}{\vec{C}\mathbf{T}}\,\tilde{X}(t) + \underset{\tilde{D}}{D}\,u(t)$$

כלומר:

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t) = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{A}}}\,\tilde{X}(t) + \underset{\tilde{B}}{\mathbf{T}^{-1}\vec{B}}\,u(t)$$

$$\tilde{X}(0) = \mathbf{T}^{-1}\vec{X}_0 = \tilde{X}_0$$

$$y(t) = \underset{\tilde{C}}{\vec{C}\mathbf{T}}\,\tilde{X}(t) + \underset{\tilde{D}}{D}\,u(t)$$

הצגות חלופיות

משוואת המצב: $$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t)=\tilde{\mathbf{A}}\tilde{X}(t)+\tilde{B}u(t)$$

תנאי התחלה: $$\tilde{X}(0)=\tilde{X}_0$$

משוואת המוצא: $$y(t)=\tilde{C}\tilde{X}(t)+\tilde{D}u(t)$$

$$\tilde{X}=\mathbf{T}^{-1}\vec{X}$$

$$\tilde{X}_0=\mathbf{T}^{-1}\vec{X}_0$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

$$\tilde{B}=\mathbf{T}^{-1}\vec{B}$$

$$\tilde{C}=\vec{C}\mathbf{T}$$

$$\tilde{D}=D$$

הסרת הצימוד בין משוואות המצב:

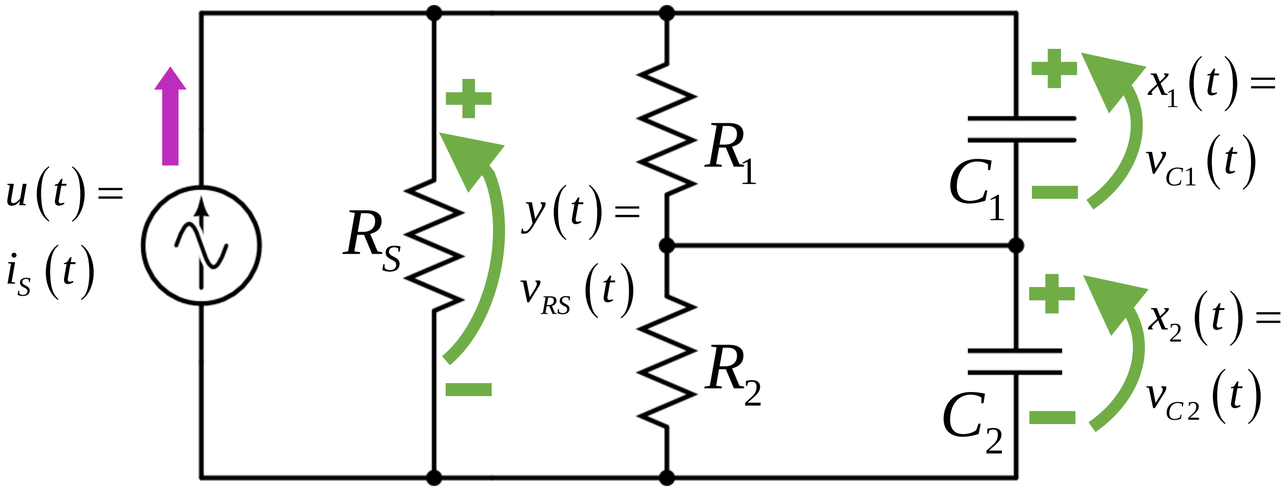
$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)+\vec{B}u(t)$$

אנחנו מעוניינים בטרנספורמציה שמלכסנת את $\mathbf{A}$

כלומר, מהי הטרנספורמציה $\mathbf{T}$ **שעבורה המטריצה**
$\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ **אלכסונית?**

תשובה: מטריצה שהעמודות שלה הם הווקטורים העצמיים של $\mathbf{A}$
ואיברי האלכסון של $\tilde{\mathbf{A}}$ הם הערכים העצמיים של $\mathbf{A}$

נחזור לדוגמא שלנו:



נתון:

$R_1=10\,[\Omega]$ $\quad C_1=0.2\,[F]$

$R_2=20\,[\Omega]$ $\quad C_2=0.1\,[F]$

$R_S=10\,[\Omega]$

ראינו ש:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{dv_{C1}}{dt}\\ \frac{dv_{C1}}{dt}\end{bmatrix}}_{\frac{d\vec{X}}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_1}\right) & -\frac{1}{R_SC_1}\\ -\frac{1}{R_SC_2} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_2}\right)\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underset{\vec{X}}{\begin{bmatrix}v_{C1}\\ v_{C2}\end{bmatrix}} + \underset{\vec{B}}{\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\\ \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}} \underset{u}{i_S}$$

כלומר:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_1}\right) & -\frac{1}{R_SC_1}\\ -\frac{1}{R_SC_2} & -\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_2}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5\\ -1 & -1.5\end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 1/C_1\\ 1/C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\\ 10\end{bmatrix}$$

נלכסן את A:

נמצא ערכים עצמיים:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ -1 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$\left|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right| = 0$$

$$(-1-\lambda)(-1.5-\lambda) - 0.5 = 0$$

$$\lambda^2 + 2.5\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4}}{2} = \begin{cases} -0.5 \\ -2 \end{cases}$$

נלכסן את A:

נמצא ווקטורים עצמיים:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ -1 & -1.5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{Q}_2=\begin{bmatrix}\gamma\\ \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\vec{Q}_1=\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

נלכסן את A:

כלומר:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ -1 & -1.5\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

נלכסן את A:

$$\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ -1 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\mathbf{T}^{-1}\vec{B}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}=\vec{C}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}=D=0$$

נמצא את C,B ו- D

כלומר:

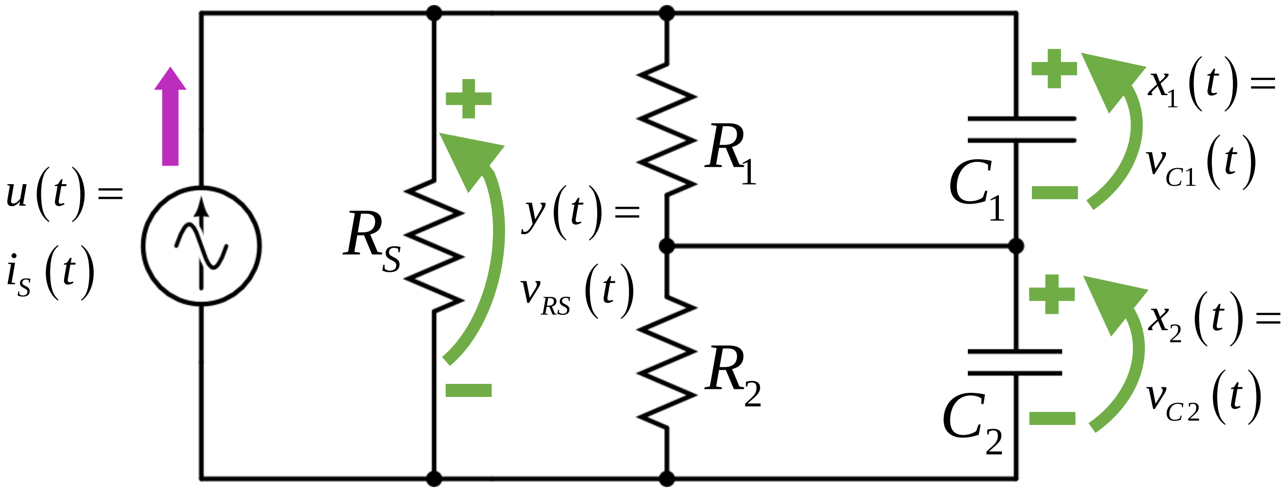
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ -1 & -1.5\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\mathbf{T}^{-1}\vec{B}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}=\vec{C}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}$$

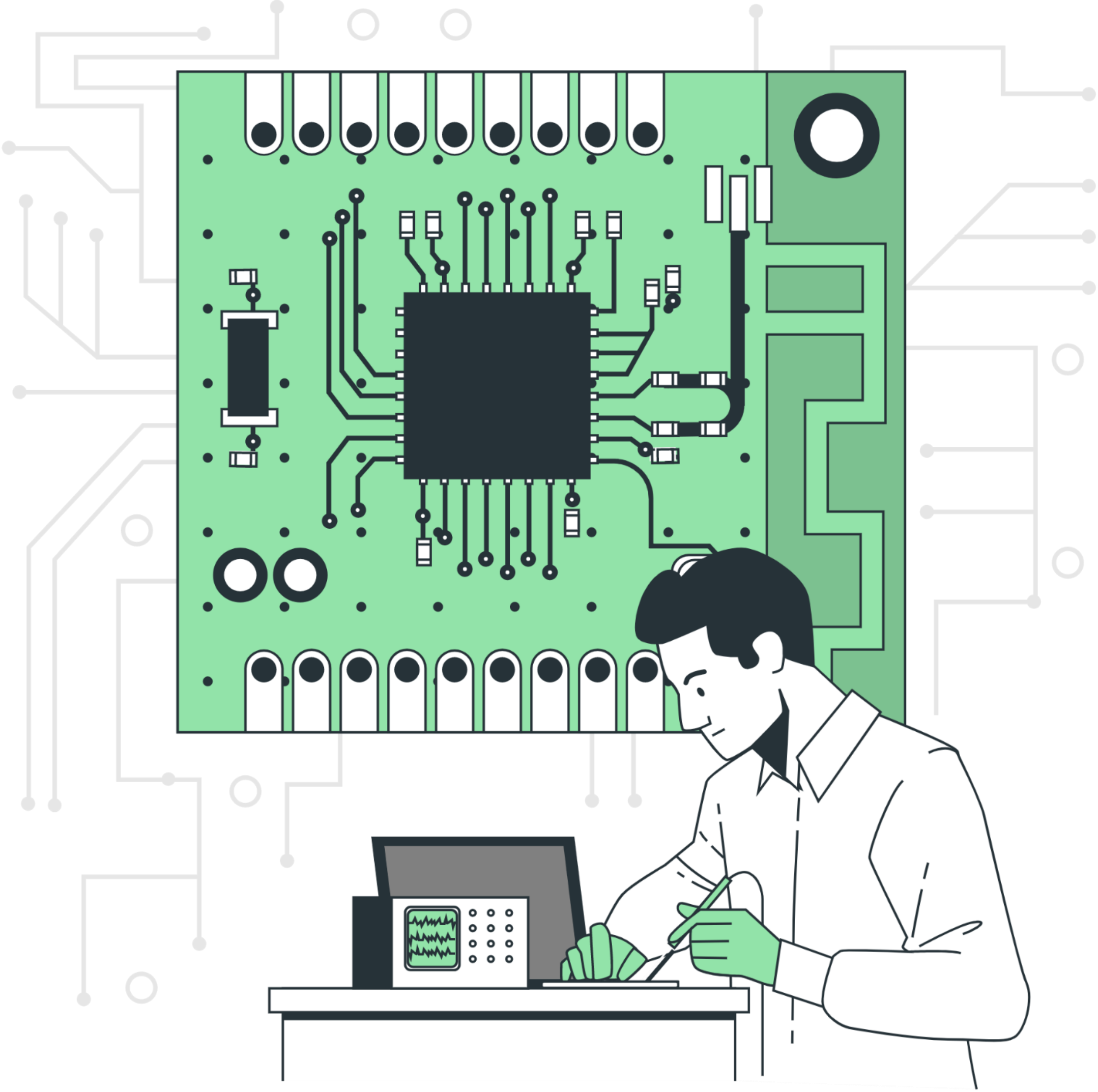
$$\tilde{D}=D=0$$

מקבלים:



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix} i_S(t)$$

$$v_{RS}(t) = \begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}$$



VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות לינאריות

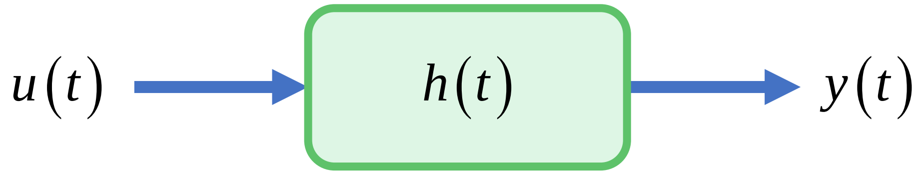
פרופ' אבישי אייל

יחידה 7 : ייצוג מערכת במרחב המצב

מקטע 7.2 : משתני מצב – חלק שני

מציאת משתני מצב מתוך הצגת המד"ר – משתני פאזה

ביחידה 4 ראינו כי:



המד"ר:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$$

$$a_n = 1 \qquad m < n$$

תנאי התחלה:

$$y^{(k)}(0) = \frac{dy^k(0)}{dt^k} = y_0^{(k)}$$

משתני הפאזה

נסתכל על המקרה הפשוט יותר:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = u(t)$$

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$$

משתני הפאזה מוגדרים באופן הבא:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x_3(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

משוואת המצב:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\frac{d\vec{X}}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{B}} u(t)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

משוואת המוצא:

$$x_1(t)=y(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\vec{C}}\vec{X}(t)+\underbrace{0}_{D}\cdot u(t)$$

$$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+\overset{D=0}{\cancel{Du(t)}}=\vec{C}\vec{X}(t)$$

תנאי התחלה:

$$y^{(0)}(0) = y(0) = y_0$$

$$y^{(1)}(0) = \frac{dy(0)}{dt} = y_0^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(0) = \frac{dy^{n-1}(0)}{dt^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$$

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-2)} \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ייצוג במרחב המצב – משתני פאזה

$$\vec{X}(0)=\begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-2)} \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \qquad \vec{X}(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \vec{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)+\vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0)=\vec{X}_0$$

משוואת המוצא:

$$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+Du(t)$$

$$\vec{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad D=0$$

בואו נראה דוגמא

מערכת LTI מיוצגת על ידי מד"ר + תנאי התחלה:

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=u(t)$$

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=3$$

מצא ייצוג בעזרת משתני פאזה:

משתני הפאזה:

$$\vec{X}(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=y'(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1(0)=1$$
$$x_2(0)=3$$

משוואות המצב והמוצא:

מערכת LTI מיוצגת על ידי מד"ר + תנאי התחלה:

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=u(t)$$

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=3$$

משוואת מצב:

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -12 & -7\end{bmatrix}\vec{X}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

משוואת המוצא:

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\vec{X}(t)+0\cdot u(t)$$

בואו נראה דוגמא:

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=u(t)$$

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=3$$

$$\vec{X}(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

משוואת המצב:

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}\vec{X}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

משוואת המוצא:

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\vec{X}(t)+0\cdot u(t)$$

ואיך נטפל במקרה הכללי יותר?

המד"ר:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$$

$$a_n = 1 \qquad\qquad m < n$$

תנאי התחלה:

$$y^{(k)}(0) = \frac{dy^k(0)}{dt^k} = y_0^{(k)}$$

בעזרת משתני המצב שפותרים את המשוואה הפשוטה יותר!
כלומר, את:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = u(t)$$

נסתכל על משתני הפאזה:

אם $x_1(t)=y(t)$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=u(t)$

אז $x_2(t)=\frac{dy(t)}{dt}$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=\frac{du(t)}{dt}$

וכן $x_3(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=\frac{d^2u(t)}{dt^2}$

וכן $x_4(t)=\frac{d^3y(t)}{dt^3}$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=\frac{d^3u(t)}{dt^3}$

וכולי

וגם:

אם $x_1(t)=y(t)$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=u(t)$

אז $b_0 x_1(t)=b_0 y(t)$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=b_0 u(t)$

וכן $b_1 x_2(t)=b_1 \frac{dy(t)}{dt}$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=b_1 \frac{du(t)}{dt}$

וכן $b_2 x_3(t)=b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t)=b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2}$

וכולי

ומכאן

אם $x_1(t)$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = u(t)$

אז $\sum_{k=0}^{m} b_k x_{k+1}(t)$ פתרון של $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$

אפשר ליצור את הפתרון למשוואה המורכבת יותר בעזרת החלפת $\vec{C}$ במשוואת המוצא:

$$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix}$$

ייצוג במרחב המצב – משתני פאזה

$$\vec{X}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-2)} \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} ? \qquad \vec{X}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

משוואת המוצא:

$$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m \end{bmatrix}$$

תנאי התחלה:

תנאי התחלה נתונים עבור $y(t)$ והנגזרות שלו:

$$\vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-2)} \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

אנחנו מעוניינים לתרגם אותם לתנאי התחלה של משתני הפאזה:

$$\vec{X}(t)$$

תנאי התחלה:

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

משוואת המוצא:

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

אפשר לראות ש-

$$y(0) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \tilde{C}\vec{X}_0$$

תנאי התחלה:

וכן ש -

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(0)}{dt} \\ \frac{dx_2(0)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(0)}{dt} \end{bmatrix} = \tilde{C}\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{t=0}$$

מתוך משוואת המצב אפשר לראות ש-

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t) \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{A}\left.\vec{X}\right|_{t=0}$$

ולכן:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{C}\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{C}\mathbf{A}\,\vec{X}\Big|_{t=0}$$

ובאותו האופן:

$$\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0} = \tilde{C}\left.\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}\right|_{t=0} = \tilde{C}\mathbf{A}^2\,\vec{X}\Big|_{t=0}$$

ו:

$$\left.\frac{d^3y}{dt^3}\right|_{t=0} = \tilde{C}\left.\frac{d^3\vec{X}}{dt^3}\right|_{t=0} = \tilde{C}\mathbf{A}^3\,\vec{X}\Big|_{t=0}$$

וכולי

נסדר את התוצאות שקיבלנו בצורה ווקטורית:

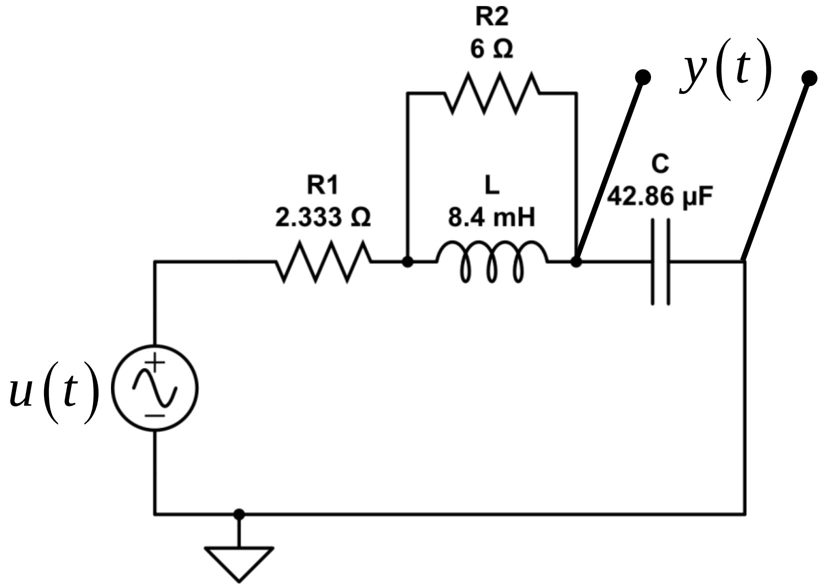
$$\vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\mathbf{A}^{n-2} \\ \tilde{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \vec{X}_0$$

ולכן:

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\mathbf{A}^{n-2} \\ \tilde{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \vec{Y}_0$$

בואו נראה דוגמא

נתון המעגל:



$v_C(0) = v_0$

$i_L(0) = i_0$

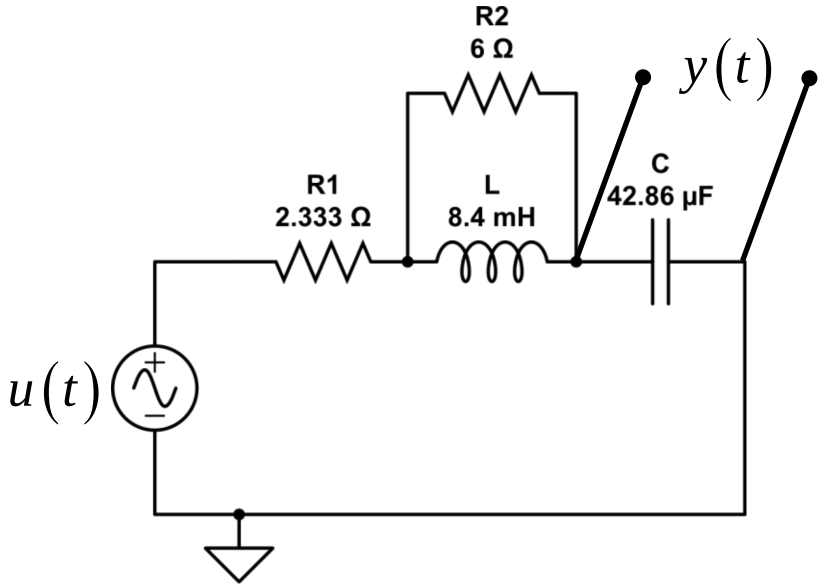
המעגל מייצג מערכת שבה מתח המקור הוא אות הכניסה ומתח הקבל הוא אות המוצא.

1. מצא את המד"ר שמתארת את המערכת

2. מצא את הייצוג של המעגל בעזרת משתני פאזה

נמצא את המד"ר:

נתון המעגל:



$$v_C(0) = v_0$$

$$i_L(0) = i_0$$

$$LC\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{d^2v_C}{dt^2}+\left(CR_1+\frac{L}{R_2}\right)\frac{dv_C}{dt}+v_C = u+\frac{L}{R_2}\frac{du}{dt}$$

$$v_C(0) = v_0 \qquad \frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{R_2 i_0 - v_0}{R_2 C + R_1 C}$$

נעביר לצורה נוחה יותר:

נסדר את המשוואה:

$$LC\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{d^2v_C}{dt^2}+\left(CR_1+\frac{L}{R_2}\right)\frac{dv_C}{dt}+v_C=u+\frac{L}{R_2}\frac{du}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2}+2\alpha\frac{dv_C}{dt}+\omega_0^2v_C=\omega_0^2u+\omega_0^2\frac{L}{R_2}\frac{du}{dt}$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}\qquad 2\alpha=\frac{CR_1+\frac{L}{R_2}}{LC\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}$$

ייצוג בעזרת משתני פאזה:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \omega_0^2 u + \omega_0^2 \frac{L}{R_2} \frac{du}{dt}$$

משתני הפאזה:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} v_C \\ \dfrac{dv_C}{dt} \end{bmatrix}$$

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \vec{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{B}} u$$

משוואת המוצא:

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \dfrac{L}{R_2} \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \vec{X}$$

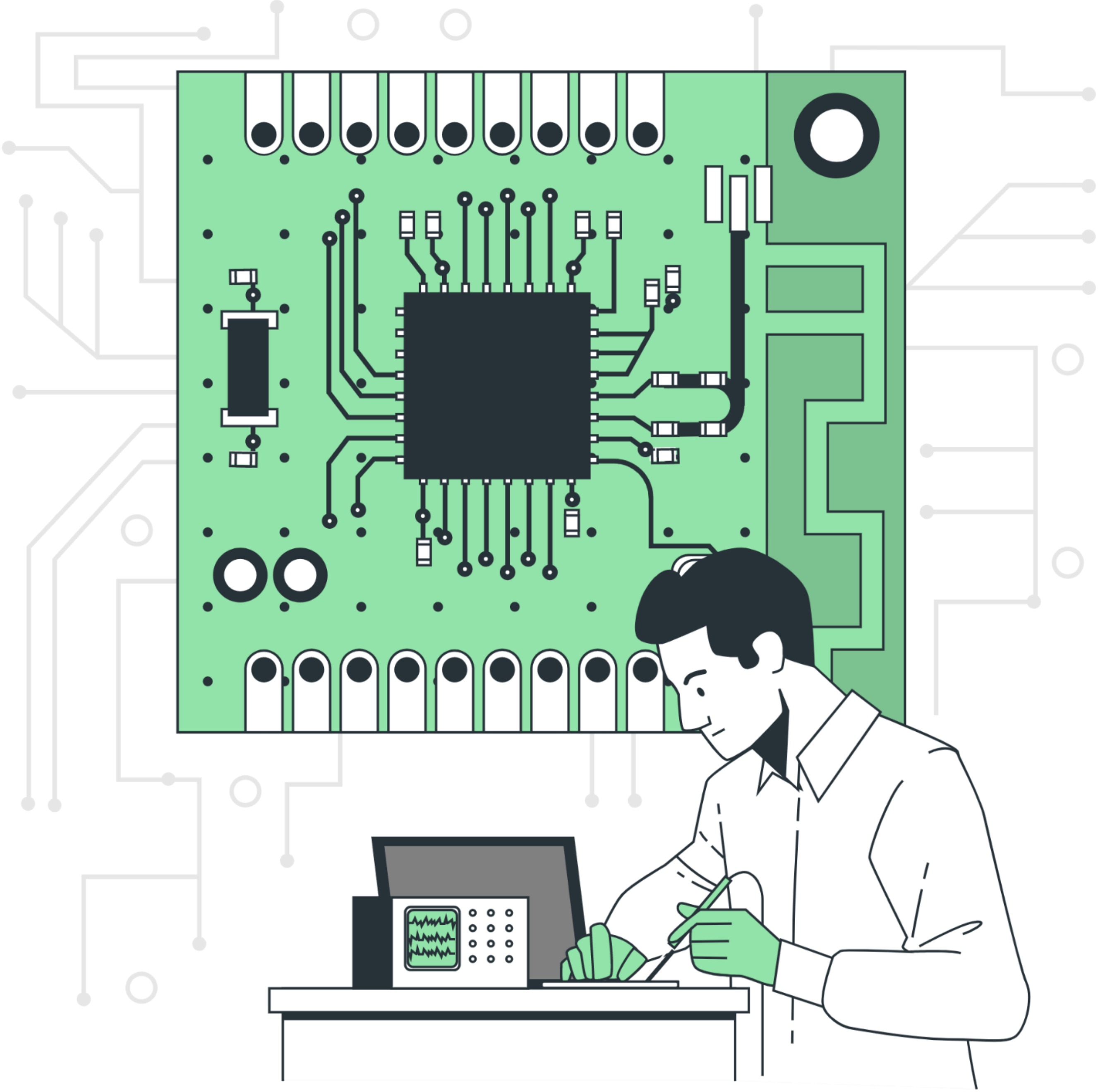
תנאי התחלה:

$$\vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} v_C(0) \\ \dfrac{dv_C(0)}{dt} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix} \qquad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \dfrac{L}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \dfrac{L}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0^4 \dfrac{L}{R_2} & \omega_0^2 - 2\alpha\omega_0^2 \dfrac{L}{R_2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \dfrac{L}{R_2} \\ -\omega_0^4 \dfrac{L}{R_2} & \omega_0^2 - 2\alpha\omega_0^2 \dfrac{L}{R_2} \end{bmatrix}^{-1} \vec{Y}_0$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 7 : ייצוג מערכת במרחב המצב

מקטע 7.3 : פתרון משוואות המצב

ראינו כי:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$

ברגיל: $\vec{X}(t) = \vec{X}_{ZIR}(t) + \vec{X}_{ZSR}(t)$

פתרון ה- ZIR

משוואת ה-ZIR:
$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)$$

תנאי התחלה:
$$\vec{X}(0)=\vec{X}_0$$

נשים לב כי:
$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)$$

ומכאן:
$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\frac{d\vec{X}(t)}{dt}=\mathbf{A}^2\vec{X}(t)$$

$$\frac{d^3}{dt^3}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\frac{d^2\vec{X}(t)}{dt^2}=\mathbf{A}^3\vec{X}(t)$$

$$\frac{d^k}{dt^k}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\frac{d^{k-1}\vec{X}(t)}{dt^{k-1}}=\mathbf{A}^k\vec{X}(t)$$

לכל t

כולל $t=0$

נרשום את X(t) כטור טיילור:

$$\vec{X}(0+t)=\vec{X}_0+\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_0 t+\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}\right|_0 t^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{d^3\vec{X}}{dt^3}\right|_0 t^3+\cdots$$

$$\vec{X}(0+t)=\vec{X}_0+\mathbf{A}\vec{X}_0 t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\vec{X}_0 t^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\vec{X}_0 t^3+\cdots$$

$$\vec{X}(t)=\left(\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3+\cdots\right)\vec{X}_0$$

פתרון ה-ZIR:

$$\boxed{\vec{X}(t)=e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}$$

אקספוננט של מטריצה:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots$$

תכונות:

1. אם $\left(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}\right)\vec{V}_1 = 0$ אז $\left(e^{\mathbf{A}t} - e^{\lambda_1 t}\mathbf{I}\right)\vec{V}_1 = 0$
2. בזמן t=0 : $e^{\mathbf{A}\cdot 0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
3. אם $\mathbf{A}$ ו- $\mathbf{B}$ חילופיות אז $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$
4. מטריצה הופכית: $e^{\mathbf{A}} e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$
5. נגזרת: $\dfrac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$
6. חישוב: נראה בהמשך ...

הפתרון הכולל: ZSR + ZIR

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) - \mathbf{A}\vec{X}(t) = \vec{B}u(t)$$

$$e^{-\mathbf{A}t}\frac{d}{dt}\vec{X}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\vec{X}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\vec{B}u(t)$$

$$e^{-\mathbf{A}t}\frac{d}{dt}\vec{X}(t) + \frac{de^{-\mathbf{A}t}}{dt}\vec{X}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\vec{B}u(t)$$

הפתרון הכולל: ZSR + ZIR

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}\vec{X}(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\vec{B}u(t)$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{X}(\tau)\right]d\tau = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)d\tau$$

$$e^{-\mathbf{A}t}\vec{X}(t) - \vec{X}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)d\tau$$

$$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}(0)}_{\text{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)d\tau}_{\text{ZSR}}$$

הפתרון הכולל: ZSR + ZIR

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$

פתרון: $$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}(0)}_{\text{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\text{ZSR}}$$

חישוב אקספוננט של מטריצה:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots = ?$$

מקרה ראשון: A לכסינה

חישוב: בעזרת ליכסון

מקרה שני: A לא לכסינה

חישוב: בעזרת צורת ג'ורדן

A לכסינה

כלומר: קיימת מטריצה הפיכה $\mathbf{P}$ שמלכסנת אותה:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

כאשר:

וקטורים עצמיים

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \cdots & \vec{V}_{n-1} & \vec{V}_n \end{bmatrix}$$

ערכים עצמיים

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

A לכסינה – העלאה בחזקה

$$\mathbf{A}^k = \left(\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\right)^k$$

$$\mathbf{A}^k = \left(\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\right)\left(\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\right)\left(\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\right)\ldots\left(\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\right)$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\ldots\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

A לכסינה - חישוב האקספוננט:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3 t^3 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{P\Lambda P}^{-1} t + \frac{1}{2!}\left(\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\right)^2 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\mathbf{P\Lambda P}^{-1}\right)^3 t^3 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{P\Lambda P}^{-1} t + \frac{1}{2!}\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1} t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{P\Lambda}^3\mathbf{P}^{-1} t^3 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\left(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}t + \frac{1}{2!}\mathbf{\Lambda}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{\Lambda}^3 t^3 + \cdots\right)\mathbf{P}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

דוגמא:

נתונה מערכת המיוצגת בעזרת משתני מצב:

משוואת המצב: $$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)+\vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה: $$\vec{X}(0)=\vec{X}_0$$

משוואת המוצא: $$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+Du(t)$$

כאשר:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix} \qquad \vec{B}=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \qquad \vec{C}=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix} \qquad D=0$$

$$\vec{X}_0=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix} \qquad u(t)=step\ \ function$$

אנחנו יודעים את צורת הפיתרון:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$

פתרון: $\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\text{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\text{ZSR}}$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים:

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1+\lambda)(3+\lambda)=0$$

$$\lambda_{1,2}=\begin{cases}-1\\ -3\end{cases}$$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

נמצא ווקטורים עצמיים: $\mathbf{A}\vec{V}_{1,2} = \lambda_{1,2}\vec{V}_{1,2}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

פתרון ה- ZIR

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

$$\vec{X}_{ZIR}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

פתרון ה- ZSR

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

$$e^{-\mathbf{A}t} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{t} - e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

פתרון ה- ZSR

$$\vec{X}(t)=\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}}+\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau} & e^{\tau}-e^{3\tau} \\ 0 & e^{3\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}d\tau$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}d\tau$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\left(e^{t}-1\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t)=\begin{bmatrix} 2\left(1-e^{-t}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

הפתרון הכולל:

$$\vec{X}(t)=\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}}+\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

$$\vec{X}_{ZIR}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} \qquad \vec{X}_{ZSR}(t)=\begin{bmatrix} 2\left(1-e^{-t}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2\left(1-e^{-t}\right) \\ 0 \end{bmatrix}u(t)$$

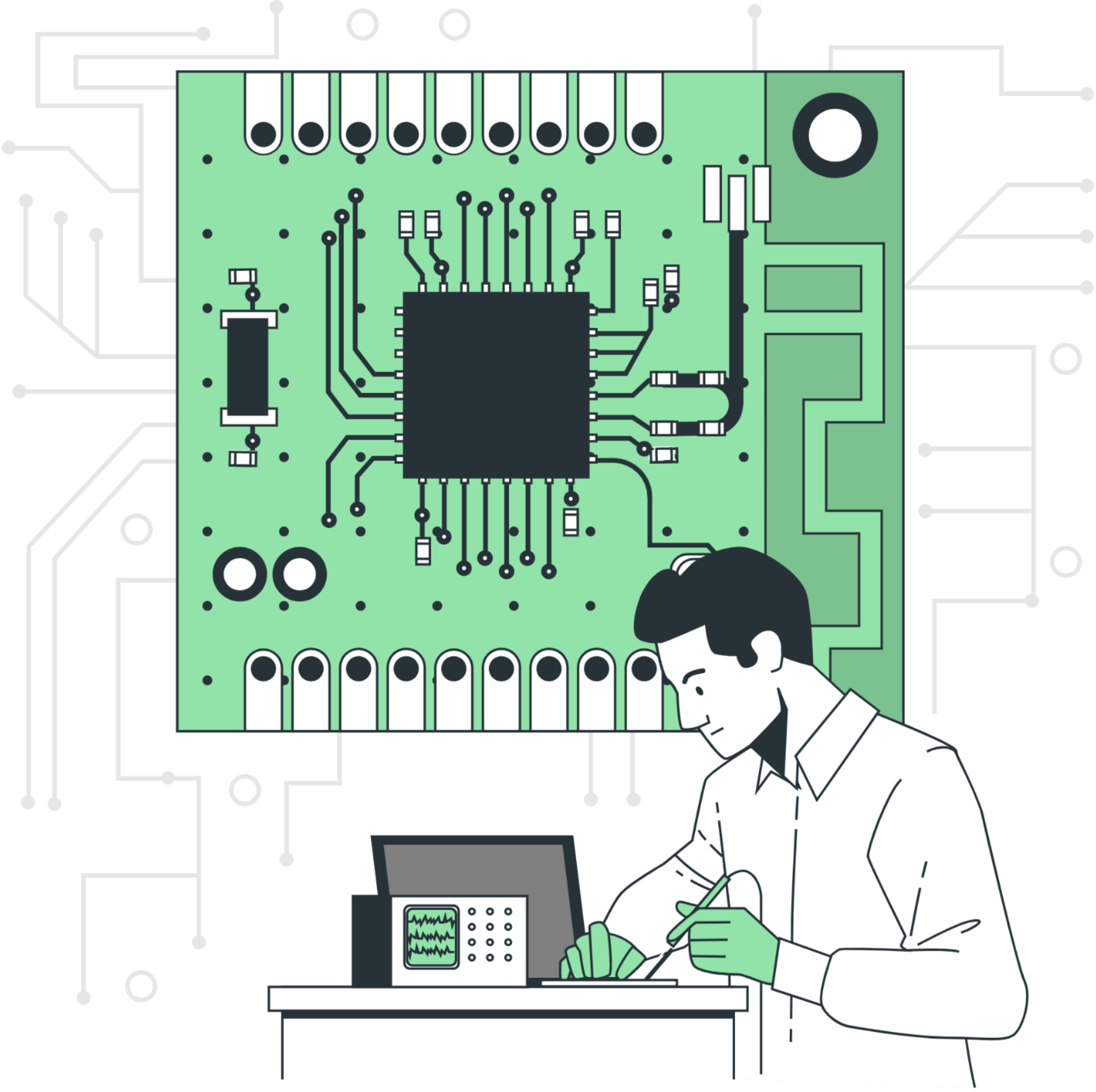
$$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+Du(t)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\vec{X}(t)=$$

$$=2e^{-t}+2e^{-3t}+4\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל



יחידה 7 : ייצוג מערכת במרחב המצב

מקטע 7.4 : פתרון משוואות המצב – חלק שני

ראינו כי:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$

פתרון: $$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

אם A לכסינה:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

אבל מה עושים אם A אינה לכסינה?

כש-A אינה לכסינה ...

1. המשמעות: לאחד (או יותר) מהערכים העצמיים יש ריבוי.

2. (**שימו לב:** ההפך אינו נכון! יכול להיות שתהיה מטריצה שלאחד (או יותר) מהערכים העצמיים שלה יש ריבוי והיא עדיין לכסינה. במקרה כזה אנחנו כבר יודעים מה לעשות.)

3. כמו כן: מספר הווקטורים העצמיים הבלתי תלויים קטן ממימד המטריצה.

בלוק ג'ורדן בסיסי

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \qquad 2\times 2$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \qquad 3\times 3$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \qquad n\times n$$

צורת ג'ורדן של מטריצה

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5
\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

אקספוננט של בלוק ג'ורדן:

2×2

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \qquad e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

3×3

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \qquad e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

מהי המטריצה P במקרה זה?

תשובה: מטריצה שהטורים שלה
הם וקטורים עצמיים מוכללים של A

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{AP}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

מהי המטריצה P במקרה זה?

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\vec{V}_1 = \lambda\vec{V}_1 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{V}_1 = 0$$

$$\mathbf{A}\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \lambda\vec{V}_2 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{V}_2 = \vec{V}_1$$

$$\mathbf{A}\vec{V}_3 = \vec{V}_2 + \lambda\vec{V}_3 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{V}_3 = \vec{V}_2$$

ווקטורים עצמיים מוכללים

לערך עצמי עם ריבוי n

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{V}_1 = 0$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{V}_2 = \vec{V}_1$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{V}_3 = \vec{V}_2$$

$$\vdots$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{V}_n = \vec{V}_{n-1}$$

כאשר $\vec{V}_k$ בלתי תלויים ליניארית

דוגמא:

נתונה מערכת המיוצגת בעזרת משתני מצב:

משוואת המצב: $$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה: $$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

משוואת המוצא: $$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

כאשר:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad u(t) = step\ \ function$$

אנחנו יודעים את צורת הפיתרון:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

משוואת המצב: $$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה: $$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

משוואת המוצא: $$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

פתרון: $$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים:

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}-5-\lambda & 1\\ -1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(5+\lambda)(3+\lambda)+1=0$$

$$\lambda^2+8\lambda+16=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-4$$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

נמצא ווקטורים עצמיים מוכללים:

$$\left(\mathbf{A}+4\mathbf{I}\right)\vec{V}_1=0$$

$$\begin{bmatrix}-5+4 & 1\\ -1 & -3+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{A}+4\mathbf{I}\right)\vec{V}_2=\vec{V}_1$$

יש אינסוף פתרונות. נבחר פתרון
שהוא ב"ת לינארית ב- $\vec{V}_1$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{12}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -4$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

בדיקה:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

חישוב $e^{\mathbf{A}t}$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-4t} & te^{-4t} \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-4t} - te^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & e^{-4t} + te^{4t} \end{bmatrix}$$

פתרון ה- ZIR

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{-4t}-te^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & e^{-4t}+te^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t)=\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\textbf{ZIR}}+\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)d\tau}_{\textbf{ZSR}}$$

$$\vec{X}_{ZIR}(t)=\begin{bmatrix} e^{-4t}-te^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & e^{-4t}+te^{4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-4t}-3te^{-4t} \\ -e^{-4t}-3te^{-4t} \end{bmatrix}$$

פתרון ה- ZSR

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{-4t}-te^{-4t} & te^{-4t} \\ -te^{-4t} & e^{-4t}+te^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t)=\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\text{ZIR}}+\underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)d\tau}_{\text{ZSR}}$$

$$e^{-\mathbf{A}t}=e^{8t}\begin{bmatrix} e^{-4t}+te^{-4t} & -te^{-4t} \\ te^{-4t} & e^{-4t}-te^{-4t} \end{bmatrix}$$

פתרון ה- ZSR

$$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\text{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\text{ZSR}}$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t) = e^{-4t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\int_0^t e^{4\tau}\begin{bmatrix} 1+\tau & -\tau \\ \tau & 1-\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}d\tau$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t) = 2e^{-4t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} (1+\tau)e^{4\tau} \\ \tau e^{4\tau} \end{bmatrix}d\tau$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4t+3-3e^{-4t} \\ 4t-1+e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{X}_{ZSR}(t) = \frac{\left(1-e^{-4t}\right)}{8}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{te^{-4t}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

הפתרון הכולל:

$$\vec{X}_{ZIR}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-4t}-3te^{-4t}\\-e^{-4t}-3te^{-4t}\end{bmatrix}$$

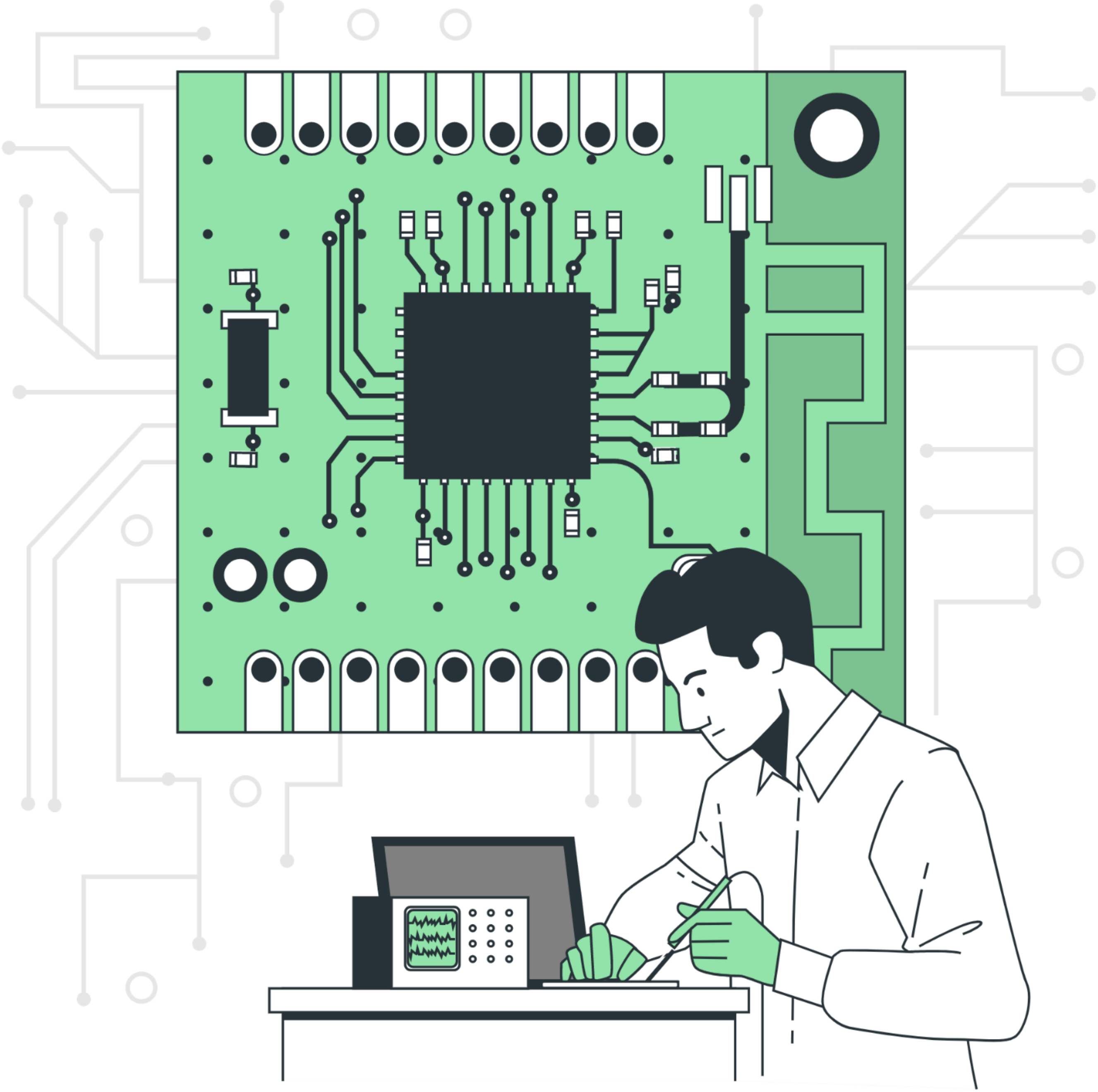
$$\vec{X}_{ZSR}(t)=\frac{\left(1-e^{-4t}\right)}{8}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}+\frac{te^{-4t}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{X}(t)=\begin{bmatrix}2e^{-4t}-3te^{-4t}\\-e^{-4t}-3te^{-4t}\end{bmatrix}+\left\{\frac{\left(1-e^{-4t}\right)}{8}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}+\frac{te^{-4t}}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}u(t)$$

$$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+Du(t)=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\vec{X}(t)=$$

$$=4e^{-4t}-6te^{-4t}+\left[\frac{3}{4}\left(1-e^{-4t}\right)+te^{-4t}\right]u(t)$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 7 : ייצוג מערכת במרחב המצב

מקטע 7.5 : משוואות המצב במישור לפלס

ראינו כי:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

משוואת המוצא:

$$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

פתרון:

$$\vec{X}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0}_{\text{ZIR}} + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau}_{\text{ZSR}}$$

התמרת לפלס של משוואות המצב:

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t)=\mathbf{A}\vec{X}(t)+\vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0)=\vec{X}_0$$

$$s\vec{X}(s)-\vec{X}_0=\mathbf{A}\vec{X}(s)+\vec{B}U(s)$$

$$\vec{X}(s)=\underbrace{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}}_{\text{ZIR}}\vec{X}_0+\underbrace{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}U(s)}_{\text{ZSR}}$$

$$\vec{X}(t)=e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0+e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau$$

ניתן לראות ש-

$$\vec{X}(s) = \underbrace{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}}_{\text{ZIR}} \vec{X}_0 + \underbrace{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} \vec{B}U(s)}_{\text{ZSR}}$$

$$\vec{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{X}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\vec{B}u(\tau)\,d\tau$$

$$\mathrm{L}\left[e^{\mathbf{A}t}\right] = [s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$$

משוואת המוצא

משוואת המוצא:

$$y(t)=\vec{C}\vec{X}(t)+Du(t)$$

$$Y(s)=\vec{C}\vec{X}(s)+DU(s)$$

$$Y(s)=\vec{C}\left\{[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{X}_0+[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}U(s)\right\}+DU(s)$$

$$Y(s)=\vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{X}_0+\left\{\vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}+D\right\}U(s)$$

פונקציית התמסורת:

$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\vec{X}_0=0}=\vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}+D$$

כלומר:

$$U(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

משתני המצב: $\vec{X}(s)=[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{X}_0+[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}U(s)$

אות המוצא: $Y(s)=\vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{X}_0+\left\{\vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}+D\right\}U(s)$

פונקציית התמסורת: $H(s)=\left.\dfrac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\vec{X}_0=0}=\vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}+D$

דוגמא:

נתונה מערכת המיוצגת בעזרת משתני מצב:

משוואת המצב:

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t) + \vec{B}u(t)$$

תנאי התחלה:

$$\vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

משוואת המוצא:

$$y(t) = \vec{C}\vec{X}(t) + Du(t)$$

כאשר:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad u(t) = step\ \ function$$

דוגמא:

בשלב ראשון נחשב:

$$\left[s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right]^{-1}$$

$$\left\{s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}s+1 & -2\\ 0 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+3 & 2\\ & s+1\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

דוגמא:

$$\begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ & s+1 \end{bmatrix}$$

$$[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

פונקציית התמסורת:

$$H(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\vec{X}_0=0} = \vec{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\vec{B}+D$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{C} = [2 \quad 0] \quad D = 0$$

$$H(s) = [2 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{s+1}$$

נציב בביטוי ל- Y:

$$\vec{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$u(t) = step \;\; function$$

$$Y(s) = \vec{C}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1} \vec{X}_0 + \left\{\vec{C}\left[s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1} \vec{B} + D\right\} U(s)$$

$$Y_{ZIR}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{(s+1)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Y_{ZSR}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{(s+1)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s}$$

נחשב את תגובת ה- ZIR

$$Y_{ZIR}(s)=\frac{4}{s+1}-\frac{4}{(s+1)(s+3)}$$

$$Y_{ZIR}(s)=\frac{4}{s+1}-\left[\frac{2}{s+1}+\frac{-2}{s+3}\right]=\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+3}$$

$$y(t)=2e^{-t}+2e^{-3t}$$

ואת תגובת ה- ZSR

$$Y_{ZSR}(s)=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{(s+1)(s+3)}\\ 0 & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y_{ZSR}(s)=\frac{4}{s+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{-4}{s+1}+\frac{4}{s}$$

$$y_{ZSR}(t)=4\left(1-e^{-t}\right)u(t)$$

רישום המד"ר מתוך פונקציית התמסורת

נניח שנתונה לנו פונקציית התמסורת של מערכת.
כיצד נקבל ממנה את **המד"ר** שמייצגת את המערכת?

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

תשובה: בעזרת התמרת לפלס הפובה

דוגמא:

נתונה פונקציית התמסורת הבאה:

$$H(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{y^k(0)=0} = \frac{2s^2 - 3s + 1}{5s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

מצא את המד"ר שמתארת את המערכת

$$\left[5s^3 + 3s^2 + s + 2\right]Y(s) = \left[2s^2 - 3s + 1\right]U(s)$$

נעשה התמרה הפוכה:

$$5\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 2\frac{d^2u}{dt^2} - 3\frac{du}{dt} + u$$

ראינו במקטע 7.1

משוואת המצב: $\frac{d}{dt}\tilde{X}(t)=\tilde{\mathbf{A}}\tilde{X}(t)+\tilde{B}u(t)$

תנאי התחלה: $\tilde{X}(0)=\tilde{X}_0$

משוואת המוצא: $y(t)=\tilde{C}\tilde{X}(t)+\tilde{D}u(t)$

$$\tilde{X}=\mathbf{T}^{-1}\vec{X}$$

$$\tilde{X}_0=\mathbf{T}^{-1}\vec{X}_0$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$$

$$\tilde{B}=\mathbf{T}^{-1}\vec{B}$$

$$\tilde{C}=\vec{C}\mathbf{T}$$

$$\tilde{D}=D$$

משתני מצב קנוניים:

המשתנים שמתקבלים אם בוחרים טרנספורמציה ש –

1. מלכסנת את $\mathbf{A}$
2. מעבירה את $\mathbf{A}$ לצורת ג'ורדן

אפשר לעבור לייצוג הקנוני ישירות מפונקציית התמסורת

מקרה ראשון

הקטבים של פונקציית התמסורת ללא ריבוי:

$$H(s)=\frac{r_1}{s+\lambda_1}+\frac{r_2}{s+\lambda_2}+\frac{r_3}{s+\lambda_3}\dots\frac{r_n}{s+\lambda_n}$$

$$Y(s)=H(s)U(s)=r_1\underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_1}}_{X_1(s)}+r_2\underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_2}}_{X_2(s)}+r_3\underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_3}}_{X_3(s)}\dots r_n\underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_n}}_{X_n(s)}$$

$$X_1(s)=\frac{U(s)}{s+\lambda_1} \longrightarrow sX_1(s)=-\lambda_1X_1(s)+U(s)$$

מקרה ראשון

הקטבים של פונקציית התמסורת ללא ריבוי:

$$X_1(s)=\frac{U(s)}{s+\lambda_1} \rightarrow sX_1(s)=-\lambda_1 X_1(s)+U(s)$$

$$X_2(s)=\frac{U(s)}{s+\lambda_2} \rightarrow sX_2(s)=-\lambda_2 X_2(s)+U(s)$$

$$X_n(s)=\frac{U(s)}{s+\lambda_n} \rightarrow sX_n(s)=-\lambda_n X_n(s)+U(s)$$

נעשה התמרת לפלס הפוכה

$$sX_1(s) = -\lambda_1 X_1(s) + U(s)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\lambda_1 x_1(t) + u(t)$$

$$sX_2(s) = -\lambda_2 X_2(s) + U(s)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\lambda_2 x_2(t) + u(t)$$

מקבלים:

משוואת המצב – ייצוג קנוני

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = r_1 \underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_1}}_{X_1(s)} + r_2 \underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_2}}_{X_2(s)} + r_3 \underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_3}}_{X_3(s)} \ldots r_n \underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_n}}_{X_n(s)}$$

$$y(t) = r_1 x_1(t) + r_2 x_2(t) + r_3 x_3(t) + \ldots r_n x_n(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

משוואת המוצא – ייצוג קנוני

מקרה שני

הקטבים של פונקציית התמסורת עם ריבוי:

$$H(s)=\frac{r_1}{(s+\lambda_1)^3}+\frac{r_2}{(s+\lambda_1)^2}+\frac{r_3}{s+\lambda_1}\dots\frac{r_n}{s+\lambda_n}$$

$$Y(s)=H(s)U(s)=r_1\underbrace{\frac{U(s)}{(s+\lambda_1)^3}}_{X_1(s)}+r_2\underbrace{\frac{U(s)}{(s+\lambda_1)^2}}_{X_2(s)}+r_3\underset{X_3(s)}{\frac{U(s)}{s+\lambda_1}}\dots r_n\underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_n}}_{X_n(s)}$$

$$X_1(s)=\frac{X_2(s)}{s+\lambda_1}\longrightarrow sX_1(s)=-\lambda_1X_1(s)+X_2(s)$$

$$X_2(s)=\frac{X_3(s)}{s+\lambda_1}\longrightarrow sX_2(s)=-\lambda_1X_2(s)+X_3(s)$$

$$X_3(s)=\frac{U(s)}{s+\lambda_1}\longrightarrow sX_3(s)=-\lambda_1X_3(s)+U(s)$$

נעשה התמרת לפלס הפוכה

$$sX_1(s) = -\lambda_1 X_1(s) + X_2(s)$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\lambda_1 x_1(t) + x_2(t)$$

$$sX_2(s) = -\lambda_1 X_2(s) + X_3(s)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\lambda_1 x_2(t) + x_3(t)$$

$$sX_3(s) = -\lambda_1 X_3(s) + U(s)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\lambda_1 x_3(t) + u(t)$$

מקבלים:

משוואת המצב – ייצוג קנוני

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = r_1 \underbrace{\frac{U(s)}{(s+\lambda_1)^3}}_{X_1(s)} + r_2 \underbrace{\frac{U(s)}{(s+\lambda_1)^2}}_{X_2(s)} + r_3 \underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_1}}_{X_3(s)} \ldots r_n \underbrace{\frac{U(s)}{s+\lambda_n}}_{X_n(s)}$$

$$y(t) = r_1 x_1(t) + r_2 x_2(t) + r_3 x_3(t) + \ldots r_n x_n(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

משוואת המוצא – ייצוג קנוני

דוגמא:

נתונה פונקציית התמסורת הבאה:

$$H(s)=\left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{y^k(0)=0}=\frac{2s+1}{s^3+5s^2+8s+4}$$

מצא את ההצגה הקנונית של המערכת

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+1)}$$

$$H(s)=\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{-1}{s+1}$$

דוגמא:

$$H(s)=\frac{2s+1}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{-1}{s+1}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\vec{x}(t)$$