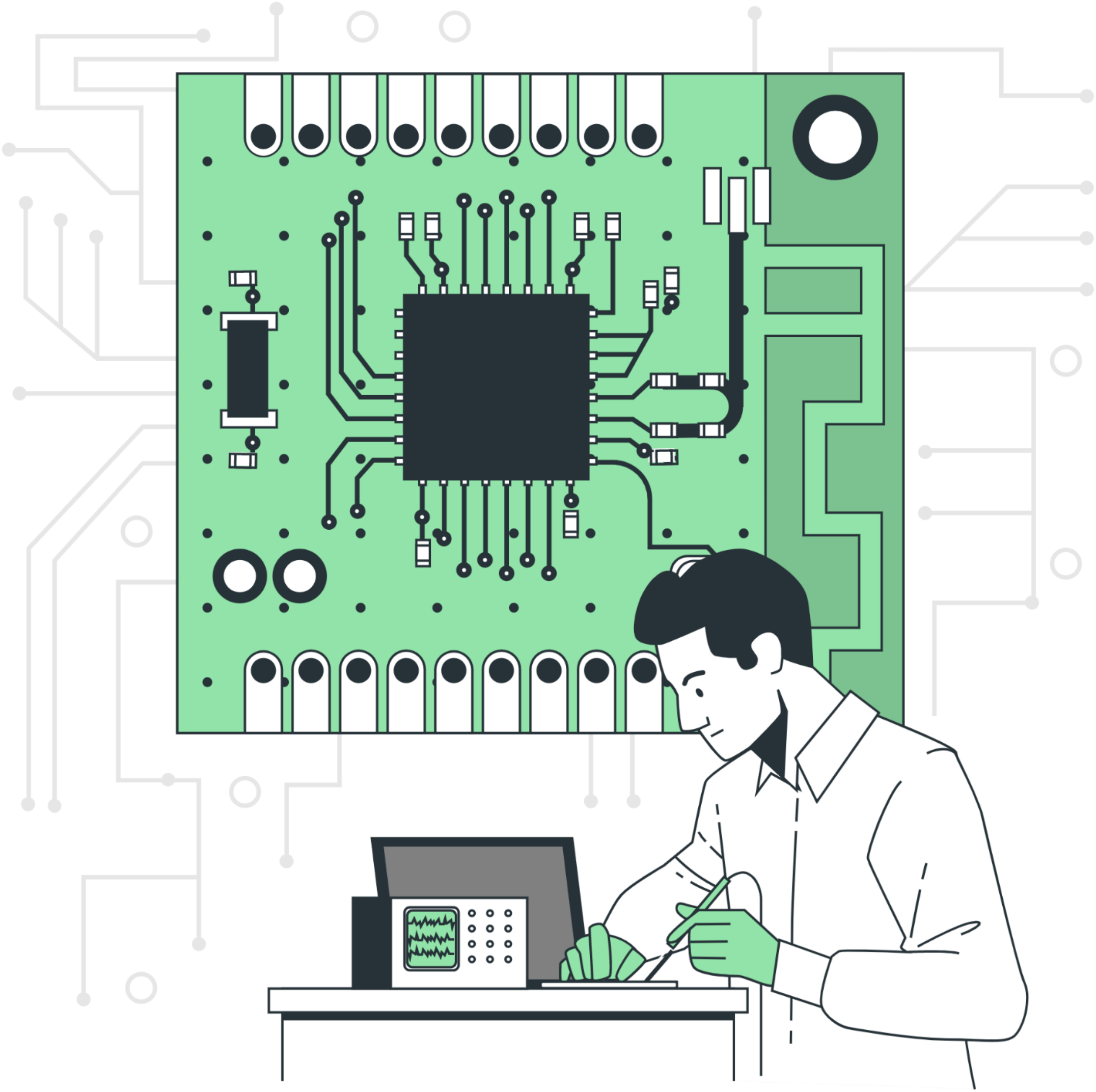
VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.1 : הגדרות

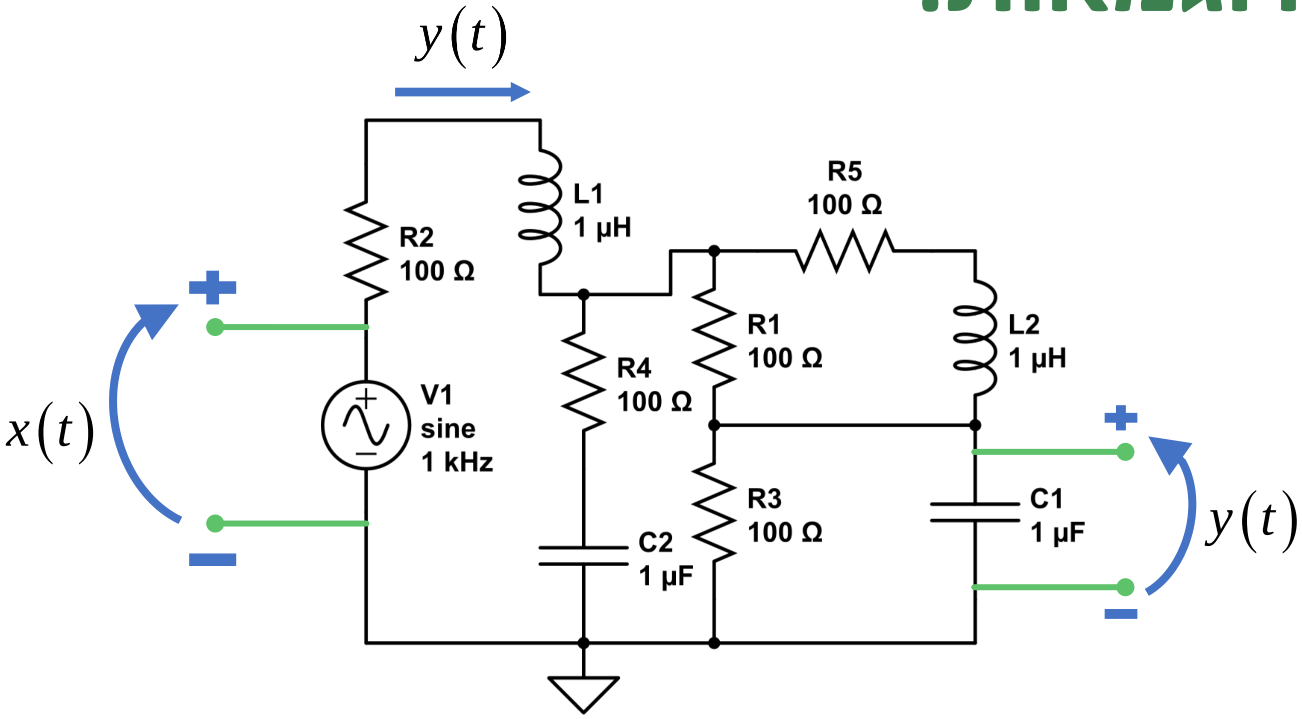
מה זה מערכת בהנדסה?

1. מקבלת אות (או אותות) כניסה (Input)
2. מתאימה לו אות (או אותות) מוצא (Output)

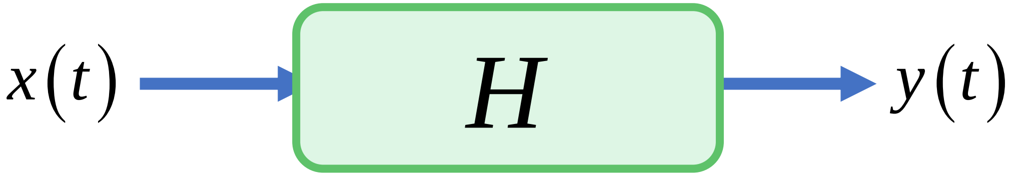
$$y(t) = H\{x(t)\}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

דוגמאות:

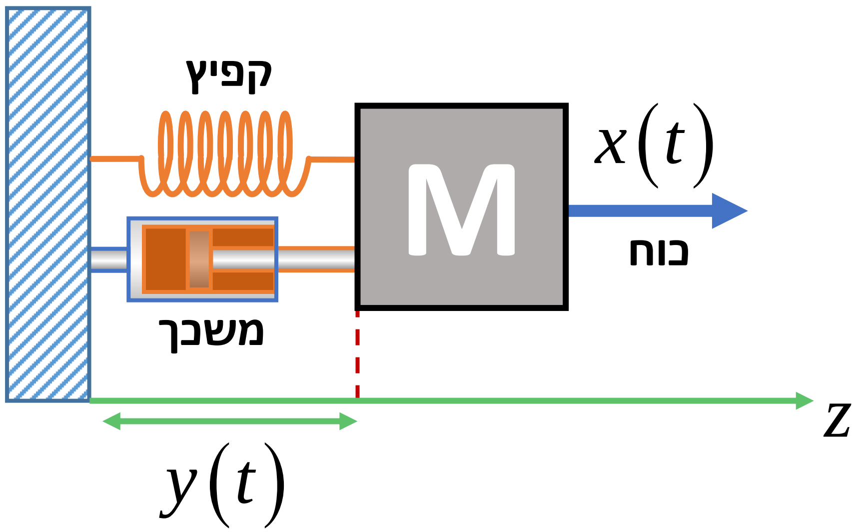


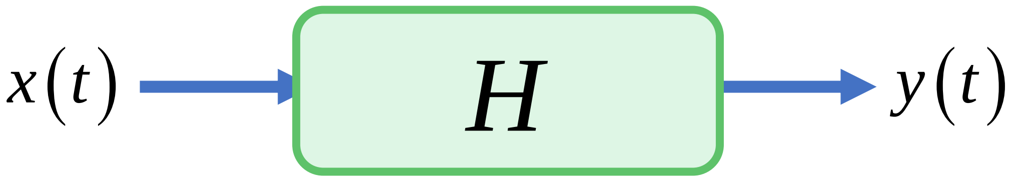
y(t)
R2
100 Ω
L1
1 µH
R5
100 Ω
R1
100 Ω
L2
1 µH
R4
100 Ω
V1
sine
1 kHz
x(t)
R3
100 Ω
C1
1 µF
y(t)
C2
1 µF



x(t)
H
y(t)

דוגמאות:





תכונות של מערכת

1. ליניאריות (Linearity)
2. אינווריאנטיות בזמן (Time Invariance)
3. סיבתיות (Causality)
4. יציבות (Stability)

לינאריות - Linearity

1. אדטיביות
2. הומוגניות

או

1. סופרפוזיציה

ליניאריות - אדטביות

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_2(t)$$

מערכת נקראית אדטיבית אם:

$$x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

לכל $x_1(t)$ **ו-** $x_2(t)$

לינאריות – הומוגניות

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

מערכת נקראית הומוגנית אם:

$$ax(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow ay(t)$$

לכל $x(t)$ **ולכל -** a

ליניאריות – עקרון הסופרפוזיציה

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_2(t)$$

מערכת נקראית ליניארית אם:

$$ax_1(t)+bx_2(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow ay_1(t)+by_2(t)$$

לכל $x_1(t)$, $x_2(t)$, a **ו-** b

דוגמא:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = 7x(t)$$

נבדוק הומוגניות:

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t) = 7x_1(t)$$

$$x_2(t) = ax_1(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_2(t) = 7x_2(t)$$

$$= 7ax_1(t)$$

$$= ay_1(t)$$

דוגמא:

$$x(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = 7x(t)$$

נבדוק אדטיביות:

$$x_1 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y_1 = 7x_1$$

$$x_2 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y_2 = 7x_2$$

$$x = x_1 + x_2 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y = 7(x_1 + x_2)$$

$$= 7x_1 + 7x_2$$

$$= y_1 + y_2$$

דוגמא:

$$x(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = 7x(t)$$

נבדוק סופרפוזיציה :

$$x_1 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y_1 = 7x_1$$

$$x_2 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y_2 = 7x_2$$

$$x = ax_1 + bx_2 \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y = 7\left(ax_1 + bx_2\right)$$

$$= 7ax_1 + 7bx_2$$

$$= ay_1 + by_2$$

דוגמא נוספת:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = 7x(t) + 3$$

נבדוק סופרפוזיציה :

$$x_1 \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1 = 7x_1 + 3$$

$$x_2 \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_2 = 7x_2 + 3$$

$$ax_1 + bx_2 \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow 7(ax_1 + bx_2) + 3$$

$$= 7ax_1 + 7bx_2 + 3$$

$$\neq ay_1 + by_2$$

המערכת לא לינארית

מי מהמערכות הבאות לינארית ומי לא-לינארית?

1. $$y(t) = 7x^2(t)$$
2. $$y(t) = \int_0^t x(t')\,dt'$$
3. $$y(t) = \int_0^t x(t')\,dt' + y_0$$
4. $$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
5. $$y(t) = t\,x(t)$$

מי מהמערכות הבאות לינארית ומי לא-לינארית?

1. $y(t) = 7x^2(t)$ ✗
2. $y(t) = \int_0^t x(t')\,dt'$ ✓
3. $y(t) = \int_0^t x(t')\,dt' + y_0$ ✗
4. $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ ✓
5. $y(t) = t\,x(t)$ ✓

אינווריאנטיות בזמן – Time invariance

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

מערכת נקראית אינוורינטית בזמן אם:

$$x(t-\tau) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t-\tau)$$

לכל $x(t)$ **ולכל -** τ

דוגמא:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = 4x^2(t)$$

נבדוק אינוורינטיות בזמן:

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t) = 4x_1^2(t)$$

$$x_1(t-\tau) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow 4x_1^2(t-\tau) =$$

$$= y_1(t-\tau)$$

דוגמא נוספת:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = t\,x(t)$$

נבדוק אינוורינטיות בזמן:

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t) = t\,x_1(t)$$

$$x_1(t-\tau) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_1(t) = t\,x_1(t-\tau)$$

$$\neq y_1(t-\tau)$$

המערכת לא אינוורינטית בזמן

סיבתיות (Causality):

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

המערכת נקראית סיבתית אם לכל $x(t)$ שמקיים:

$$x(t) = 0 \quad for\ all \quad t < t_0$$

מתקיים:

$$y(t) = 0 \quad for\ all \quad t < t_0$$

יציבות (Stability):

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y(t)$$

המערכת נקראית יציבה אם לכל $x(t)$ שמקיים:

$$|x(t)| < \infty \quad for\ all \quad t$$

מתקיים:

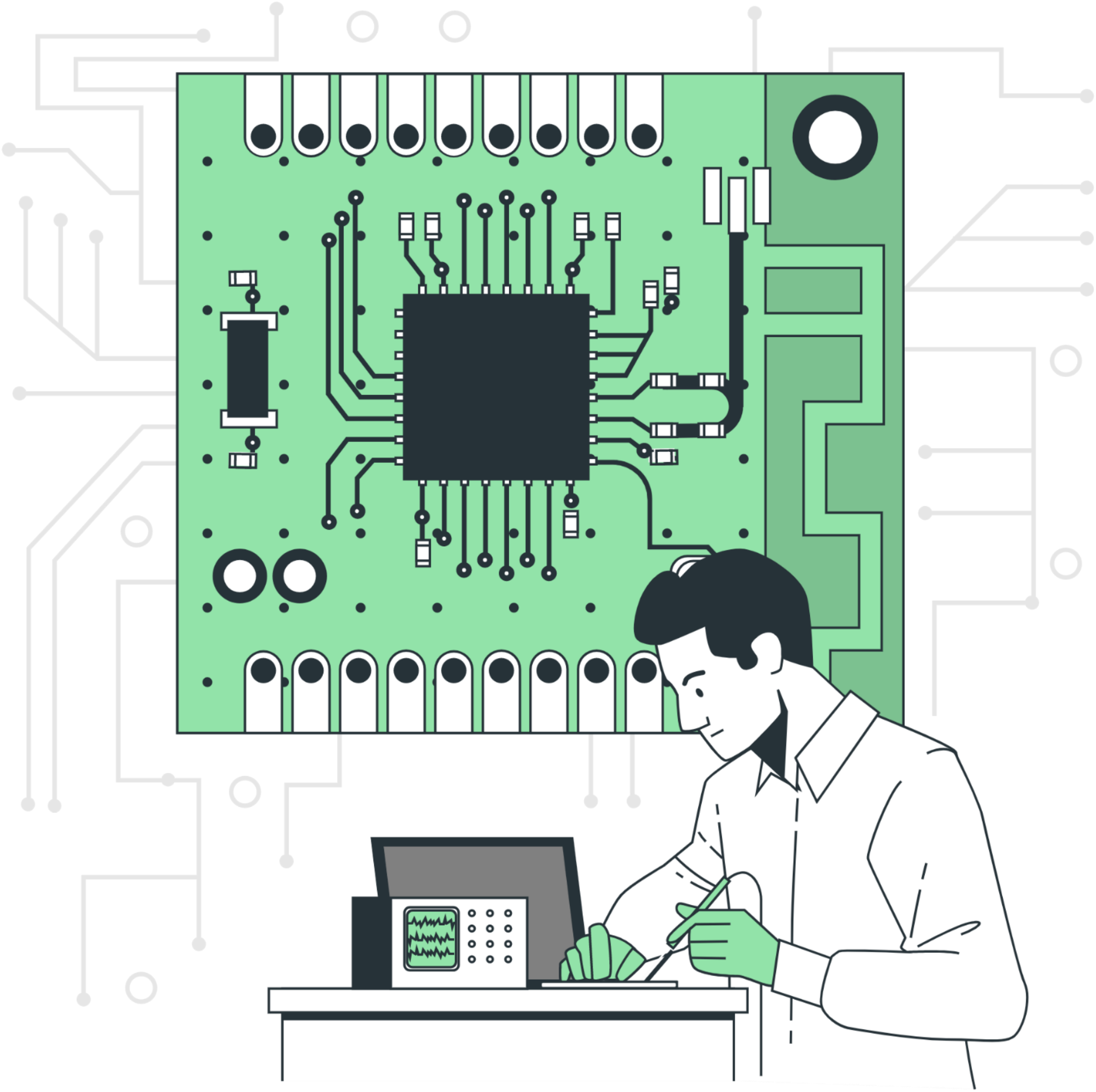
$$|y(t)| < \infty \quad for\ all \quad t$$

מערכת LTI

Linear and **T**ime **I**nvariant

מערכת לינארית ואינוורינטית בזמן

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.2 : תגובה למדרגה ותגובה להלם

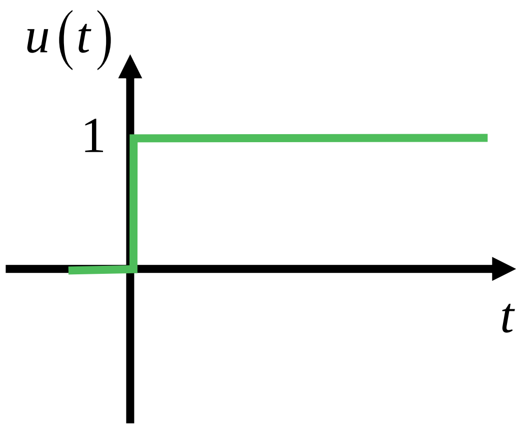
מספר הערות לגבי התגובה למדרגה והתגובה להלם:

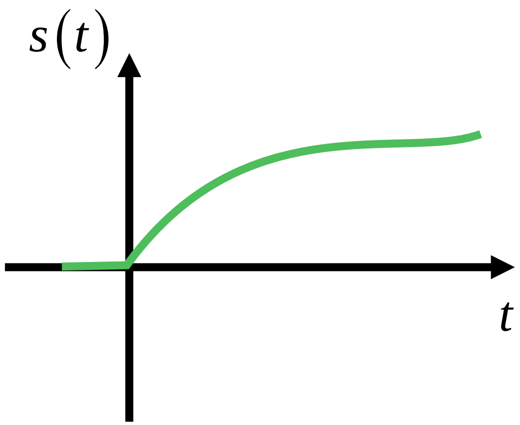
1. בעלות חשיבות רבה בתחום המעגלים והמערכות
2. למרות שנדגים בעזרת מעגלים, מדובר במשהו כללי הרבה יותר
3. אנחנו מניחים שהמערכות/מעגלים הם LTI
4. במעגלים זה אומר שנחפש את תגובות ה- ZSR

התגובה למדרגה:

$$u(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow s(t)$$

התגובה של המערכת לאות מדרגה בכניסה





כאמור, מניחים שתנאי ההתחלה הם אפס

יחידות

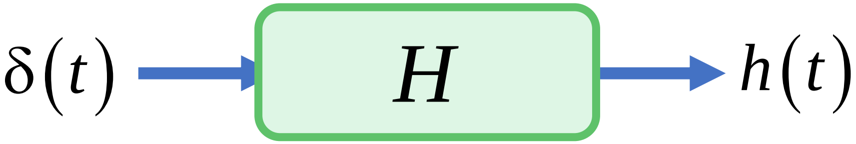
$$u(t) \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow s(t)$$

1. הפונקציה $u(t)$ מוגדרת כחסרת יחידות
2. אבל לאות הכניסה למערכת יש בדרך כלל יחידות
3. כלומר, הכניסה היא בעצם $a \cdot u(t)$

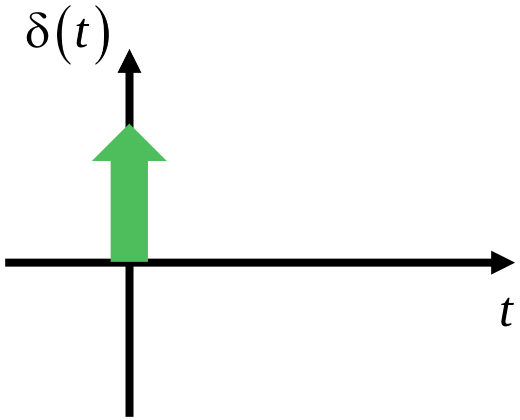
לדוגמא: $1[V] \cdot u(t)$ או $1[A] \cdot u(t)$

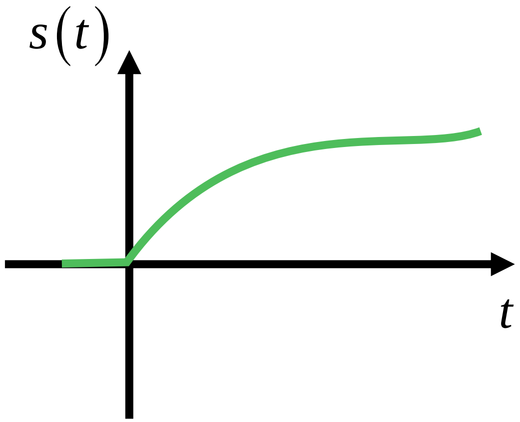
a קבוע ש"מסדר" יחידות

התגובה להלם:



התגובה של המערכת לאות הלם בכניסה





כאמור, מניחים שתנאי ההתחלה הם אפס

יחידות

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow s(t)$$

1. הפונקציה $\delta(t)$ מוגדרת על ידי האינטגרל:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1$$

2. כלומר, יש לה יחידות של $1/\mathrm{sec}$
3. אבל לאות הכניסה למערכת יש בדרך כלל יחידות אחרות
4. כלומר, הכניסה היא בעצם $a \cdot \delta(t)$

דוגמאות:

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow s(t)$$

הלם של זרם: $i(t) = a \cdot \delta(t) \rightarrow [A] = [\text{Coulomb}][1/\text{sec}]$

הלם של מתח: $v(t) = a \cdot \delta(t) \rightarrow [\text{V}] = [\text{V} \cdot \text{sec}][1/\text{sec}]$

הקשר בין התגובה למדרגה לתגובה להלם:

אם המערכת היא **LTI**

$$h(t) = a\frac{ds(t)}{dt}$$

$$a = 1[\sec]$$

למה זה נכון?

$$bu(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow s(t)$$

נניח ש- ***s(t)*** היא התגובה למדרגה.

מה התגובה לפולס?

$$p_{\Delta}(t) = a\,\frac{bu(t) - bu(t-\Delta)}{\Delta}$$

$1[\text{sec}]$

למה זה נכון?

$$p_\Delta(t) = a\frac{bu(t)-bu(t-\Delta)}{\Delta} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y_\Delta(t) = a\frac{s(t)-s(t-\Delta)}{\Delta}$$

?

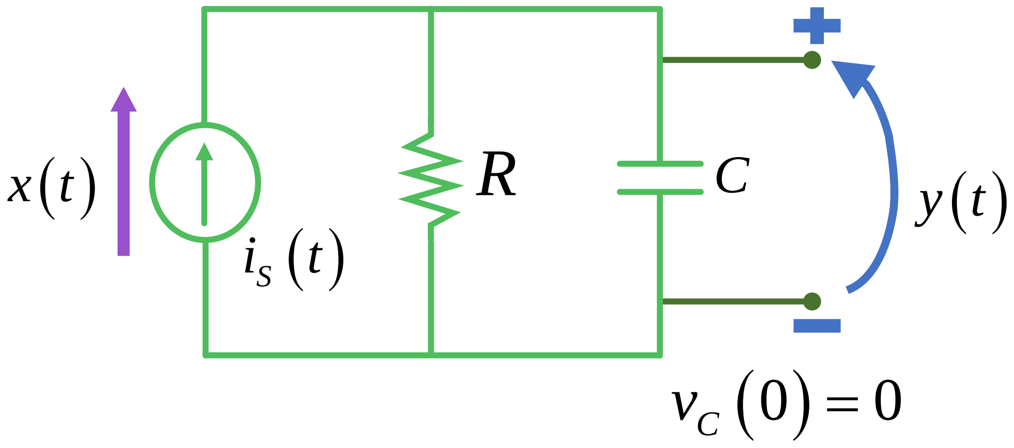
$$\Delta \to 0$$

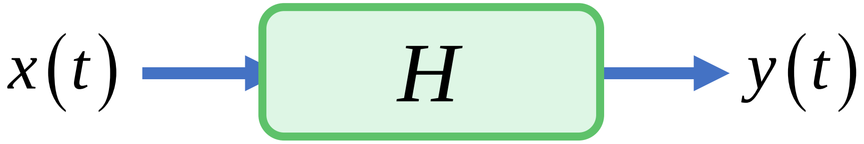
$$c\delta(t) \qquad\qquad a\frac{ds(t)}{dt}$$

$$\boxed{h(t) = a\frac{ds(t)}{dt}}$$

דוגמא:

מצא את תגובת ההלם של המערכת כאשר
זרם המקור הוא הכניסה ומתח הקבל הוא המוצא

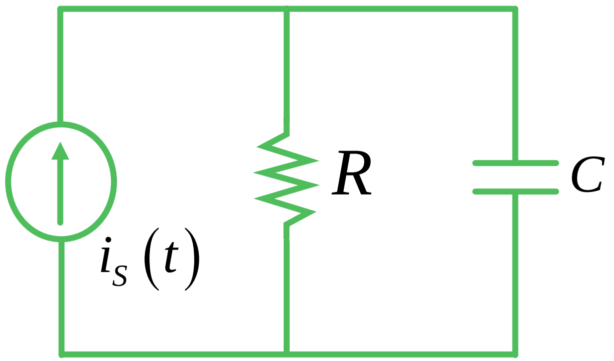




נפתור בשני אופנים:

1. נמצא את התגובה למדרגה ונגזור אותה
2. נפתור באופן ישיר (עדכון תנאי התחלה)

מציאת התגובה למדרגה:



KCL:

$$i_R(t)+i_C(t)=i_S(t)$$

$$\frac{v_R(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=i_S(t)$$

KVL:

$$v_R(t)=v_C(t)$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=Ri_S(t)$$

קיבלנו אם כן:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=Ri_S(t)$$
$$v_C(0)=0$$

נציב במקום אות הכניסה פונקציית מדרגה:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=Rbu(t)$$
$$v_C(0)=0$$

$$b=1[A]$$

תגובת המדרגה:

$$\boxed{v_C(t) = bR\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad t \ge 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_C(t) = bR\left(1-e^{-t/\tau}\right)u(t)}$$

תגובת ההלם:

$$s(t)=bR\left(1-e^{-t/\tau}\right)u(t)$$

$$h(t)=a\frac{ds(t)}{dt} \qquad a=1[\sec]$$

$$=\frac{abR}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)+\underbrace{abR\left(1-e^{-t/\tau}\right)\delta(t)}_{0}$$

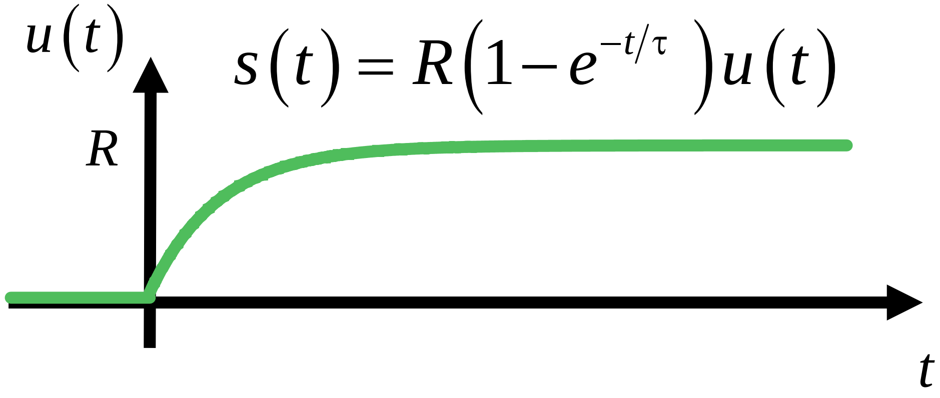
$$\boxed{h(t)=\frac{ab}{C}e^{-t/\tau}u(t)}$$

$$\frac{[\sec][\text{Coulomb}/\sec]}{[\text{Coulomb}/\text{Volt}]}=[\text{Volt}]$$

כלומר:

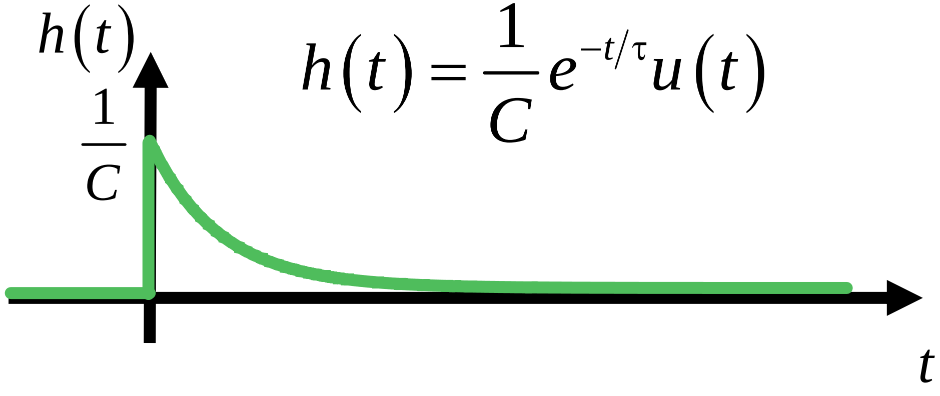
התגובה למדרגה

$$s(t) = R\left(1-e^{-t/\tau}\right)u(t)$$



התגובה להלם

$$h(t) = \frac{1}{C}e^{-t/\tau}u(t)$$



שיטה שנייה:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=Ri_S(t)$$
$$v_C(0)=0$$

נציב במקום אות הכניסה פונקציית מדרגה:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=R\delta(t)$$
$$v_C(0)=0$$

עידכון תנאי התחלה:

$$\boxed{\begin{array}{l} RC\dfrac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=R\delta(t) \\ v_C(0)=0 \end{array}}$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\left\{RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)\right\}dt=\int_{0^-}^{0^+}\{R\delta(t)\}dt$$

$$RC\int_{0^-}^{0^+}\frac{dv_C(t)}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}v_C(t)dt=R\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

$$RC\left[v_C(0^+)-v_C(0^-)\right]+0=R$$

עידכון תנאי התחלה:

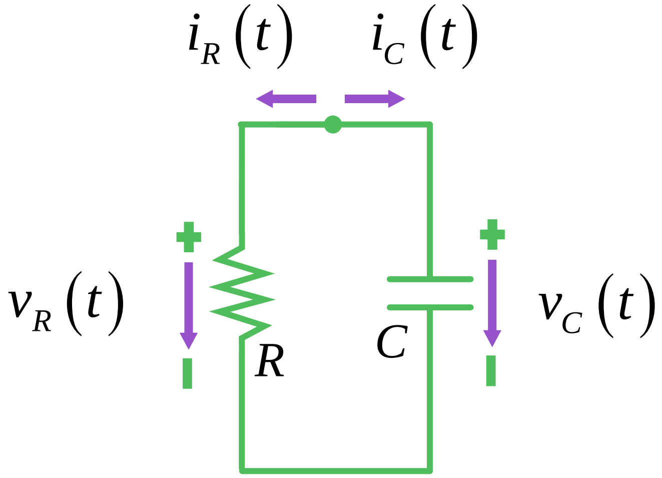
$$RC\left[v_C\left(0^+\right)-v_C\left(0^-\right)\right]+0=R$$

$$v_C\left(0^+\right)=\frac{1}{C}$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=0$$

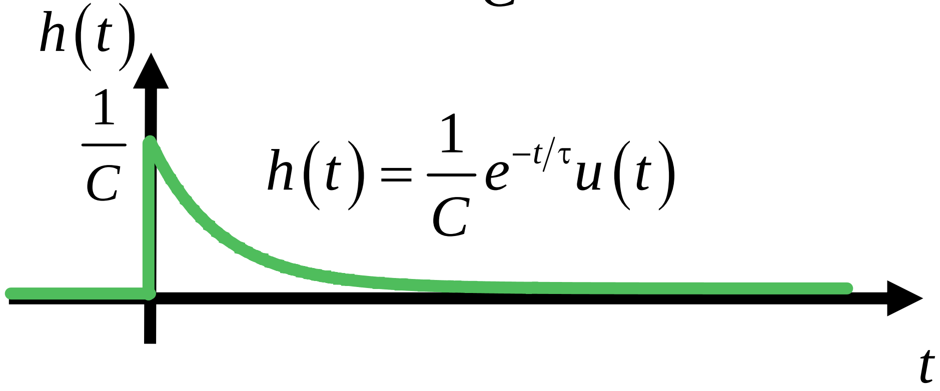
$$v_C\left(0^+\right)=\frac{1}{C}$$

וזה אנחנו כבר מכירים:



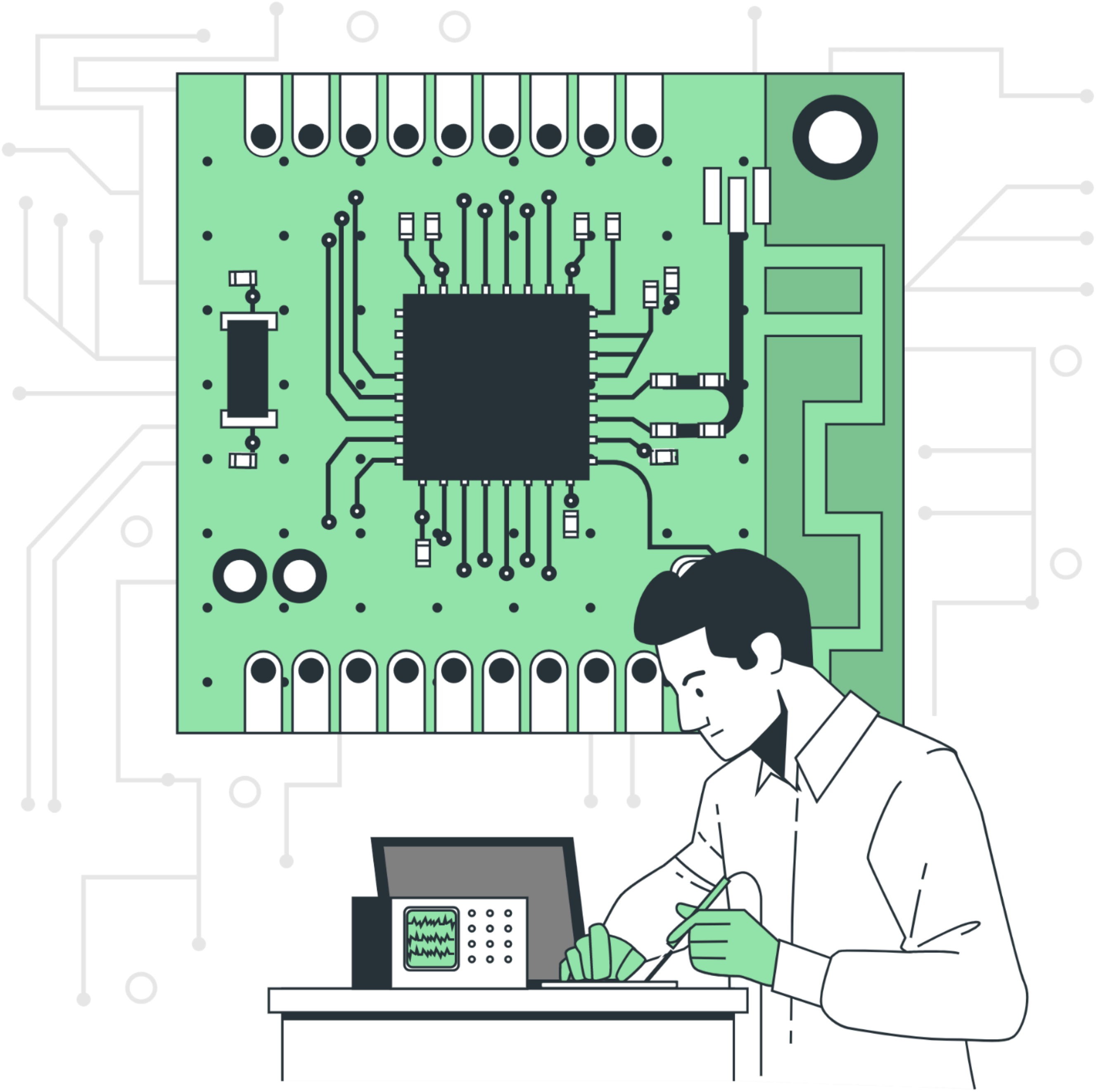
תגובת ה- **ZIR** עם תנאי התחלה:

$$v_C(0^+) = \frac{1}{C}$$



$$h(t) = \frac{1}{C} e^{-t/\tau} u(t)$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

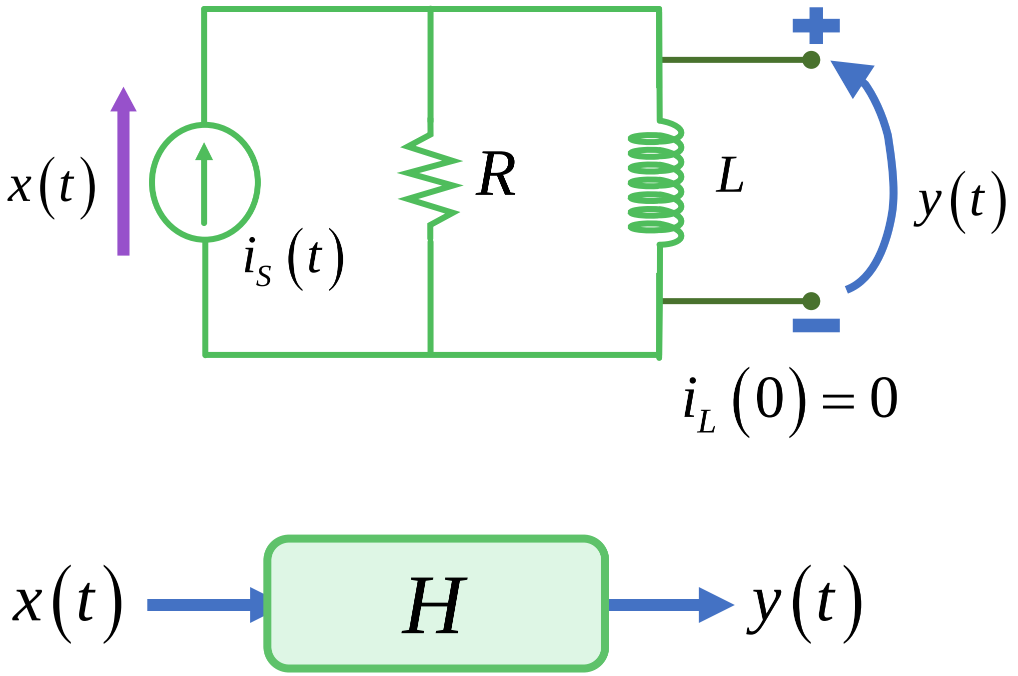
פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.3 : תגובה להלם – דוגמאות נוספות

דוגמא:

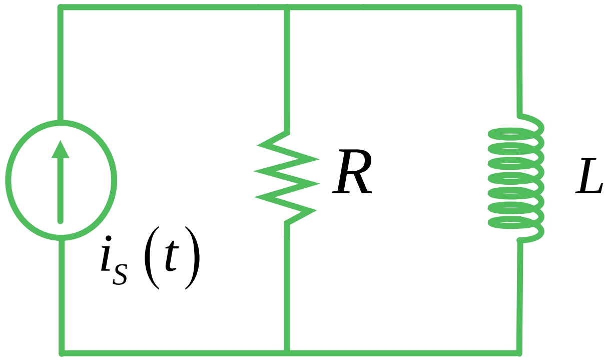
מצא את תגובת ההלם של המערכת כאשר
זרם המקור הוא הכניסה ומתח הסליל הוא המוצא



נפתור בשני אופנים:

1. נמצא את התגובה למדרגה ונגזור אותה
2. נפתור באופן ישיר (עדכון תנאי התחלה)

מציאת התגובה למדרגה:



KCL:

$$i_R(t)+i_L(t)=i_S(t)$$

$$\frac{v_R(t)}{R}+i_L(t)=i_S(t)$$

KVL:

$$v_R(t)=v_L(t)$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=i_S(t)$$

קיבלנו אם כן:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=i_S(t)$$
$$i_L(0)=0$$

נציב במקום אות הכניסה פונקציית מדרגה:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=u(t)$$
$$i_L(0)=0$$

תגובת המדרגה:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad t \ge 0$$

$$\Downarrow$$

$$i_L(t) = \left(1 - e^{-t/\tau}\right) u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$v_L(t) = \frac{L}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) + \underbrace{L\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\delta(t)}_{0}$$

תגובת המדרגה:

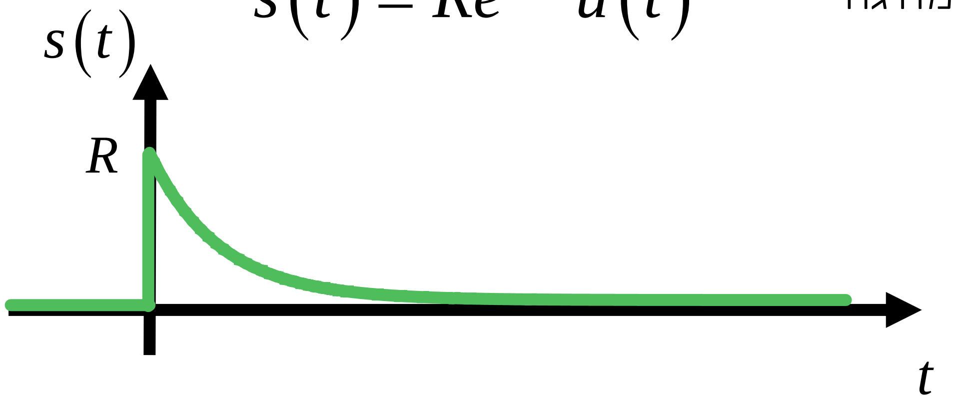
$$v_L(t) = \frac{L}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

$$\downarrow$$

$$v_L(t) = Re^{-t/\tau} u(t)$$

התגובה למדרגה

$$s(t) = Re^{-t/\tau} u(t)$$



תגובת ההלם:

$$s(t) = Re^{-t/\tau}u(t)$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

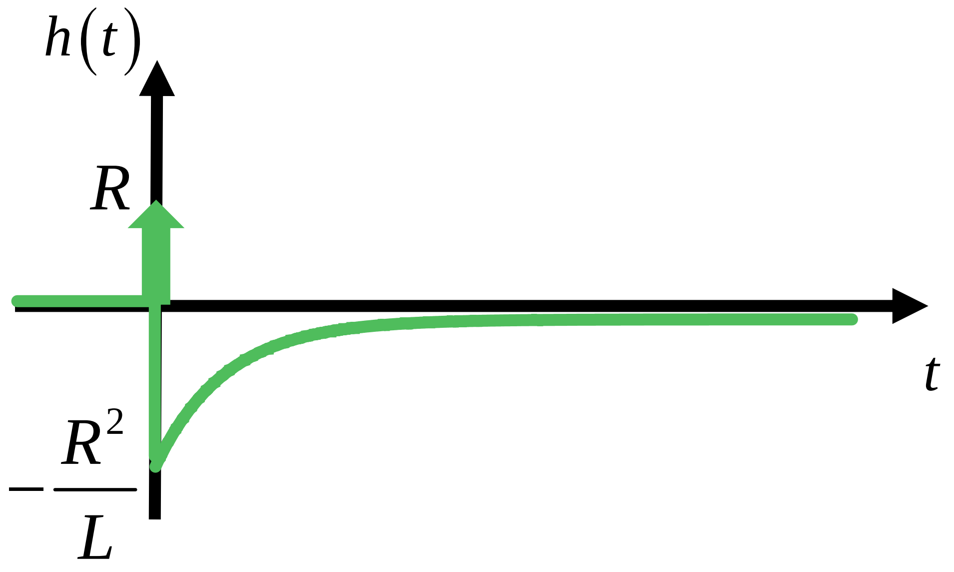
$$= -\frac{R}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) + Re^{-t/\tau}\delta(t)$$

$$\boxed{h(t) = -\frac{R^2}{L}e^{-t/\tau}u(t) + R\delta(t)}$$

כלומר:

התגובה להלם

$$h(t) = -\frac{R^2}{L}e^{-t/\tau}u(t) + R\delta(t)$$



שיטה שנייה:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=i_S(t)$$
$$i_L(0)=0$$

נציב במקום את הכניסה פונקציית הלם:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=\delta(t)$$
$$i_L(0)=0$$

עידכון תנאי התחלה:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{L}{R}\dfrac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=\delta(t) \\ i_L(0)=0 \end{array}}$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\left\{\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)\right\}dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt$$

$$\underbrace{\frac{L}{R}\int_{0^-}^{0^+}\frac{di_L(t)}{dt}dt}+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}i_L(t)\,dt}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt}$$

$$\frac{L}{R}\underbrace{\left[i_L(0^+)-i_L(0^-)\right]}+0=1$$

עידכון תנאי התחלה:

$$\frac{L}{R}\left[i_L\left(0^+\right)-i_L\left(0^-\right)\right]+0=1$$

$$i_L\left(0^+\right)=\frac{R}{L}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=0\\&i_L\left(0^+\right)=\frac{R}{L}\end{aligned}}$$

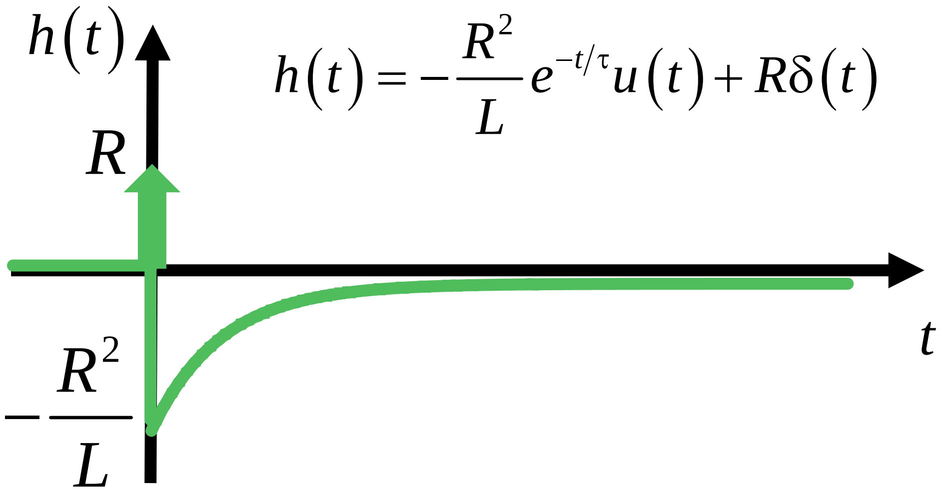
וזה אנחנו יודעים לפתור:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = \frac{R}{L} e^{-t/\tau} u(t)$$

$$h(t) = v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} =$$

$$= -\frac{1}{\tau} R e^{-t/\tau} u(t) + R e^{-t/\tau} \delta(t)$$

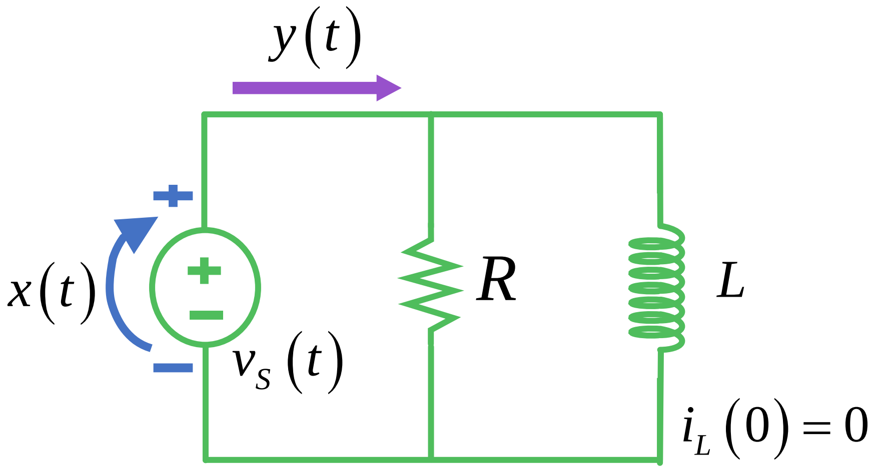


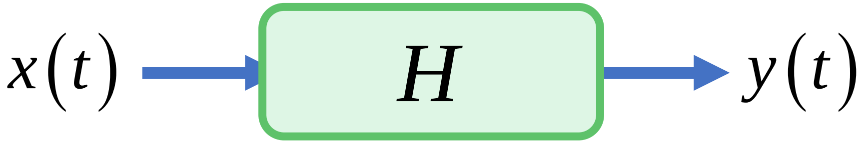
$$h(t) = -\frac{R^2}{L} e^{-t/\tau} u(t) + R\delta(t)$$

התגובה להלם

דוגמא נוספת:

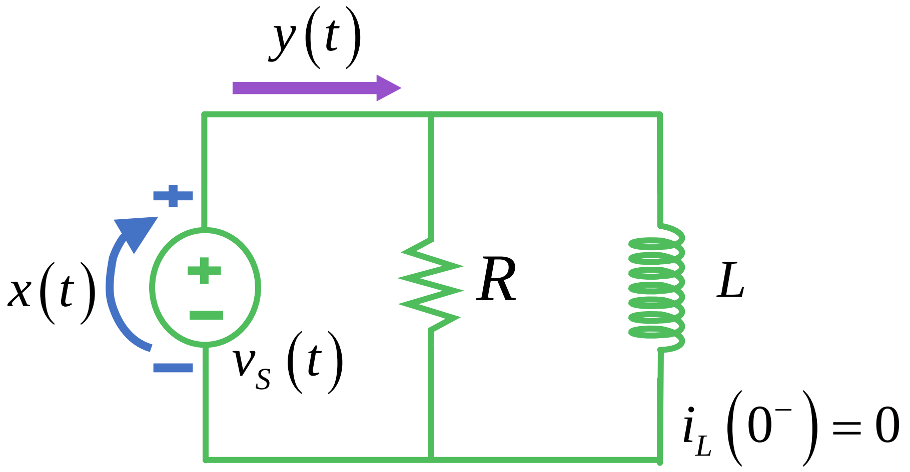
מצא את תגובת ההלם של המערכת כאשר
מתח המקור הוא הכניסה והזרם המסומן הוא המוצא





דוגמא נוספת:

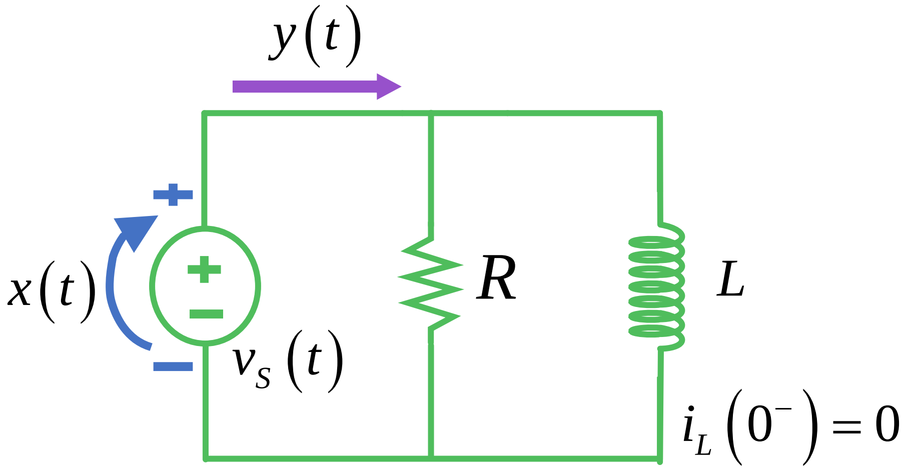
מצא את תגובת ההלם של המערכת כאשר
מתח המקור הוא הכניסה והזרם המסומן הוא המוצא



$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$y(t) = \frac{v_s(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v_s(t')dt'$$

התגובה למדרגה:



$$y(t)=\frac{v_s(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_s(t')dt'$$

$$s(t)=\frac{1}{R}u(t)+\frac{1}{L}r(t)$$

התגובה להלם:

$$s(t)=\frac{1}{R}u(t)+\frac{1}{L}r(t)$$

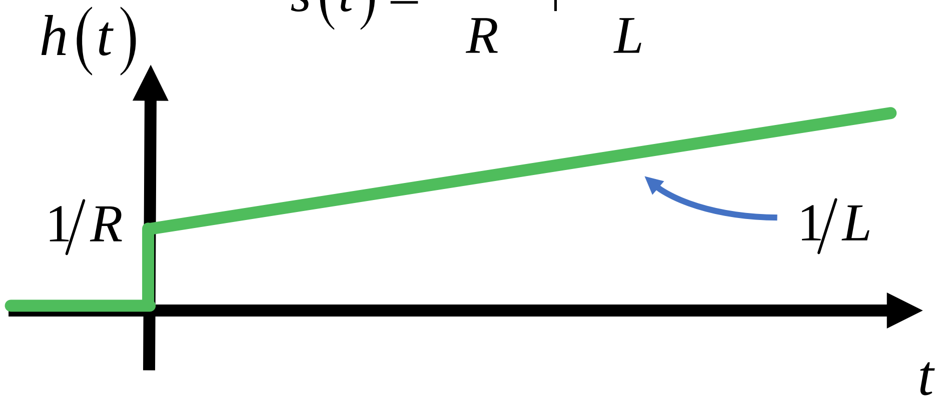
$$\Downarrow$$

$$h(t)=\frac{1}{R}\delta(t)+\frac{1}{L}u(t)$$

כלומר:

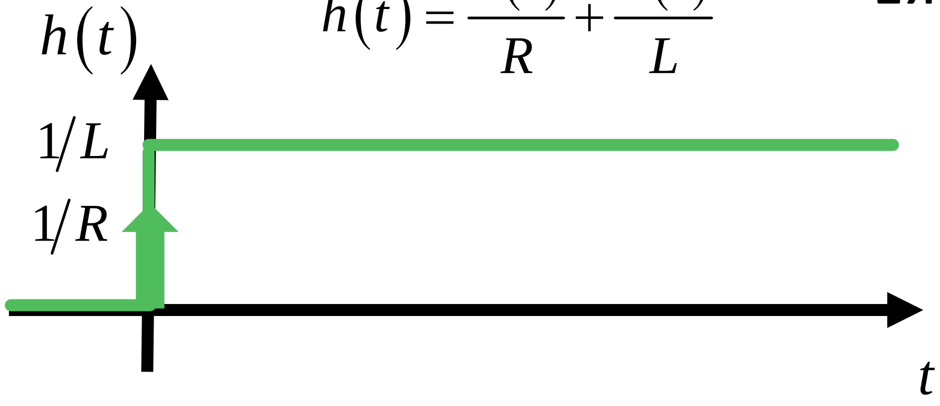
התגובה למדרגה

$$s(t)=\frac{u(t)}{R}+\frac{r(t)}{L}$$

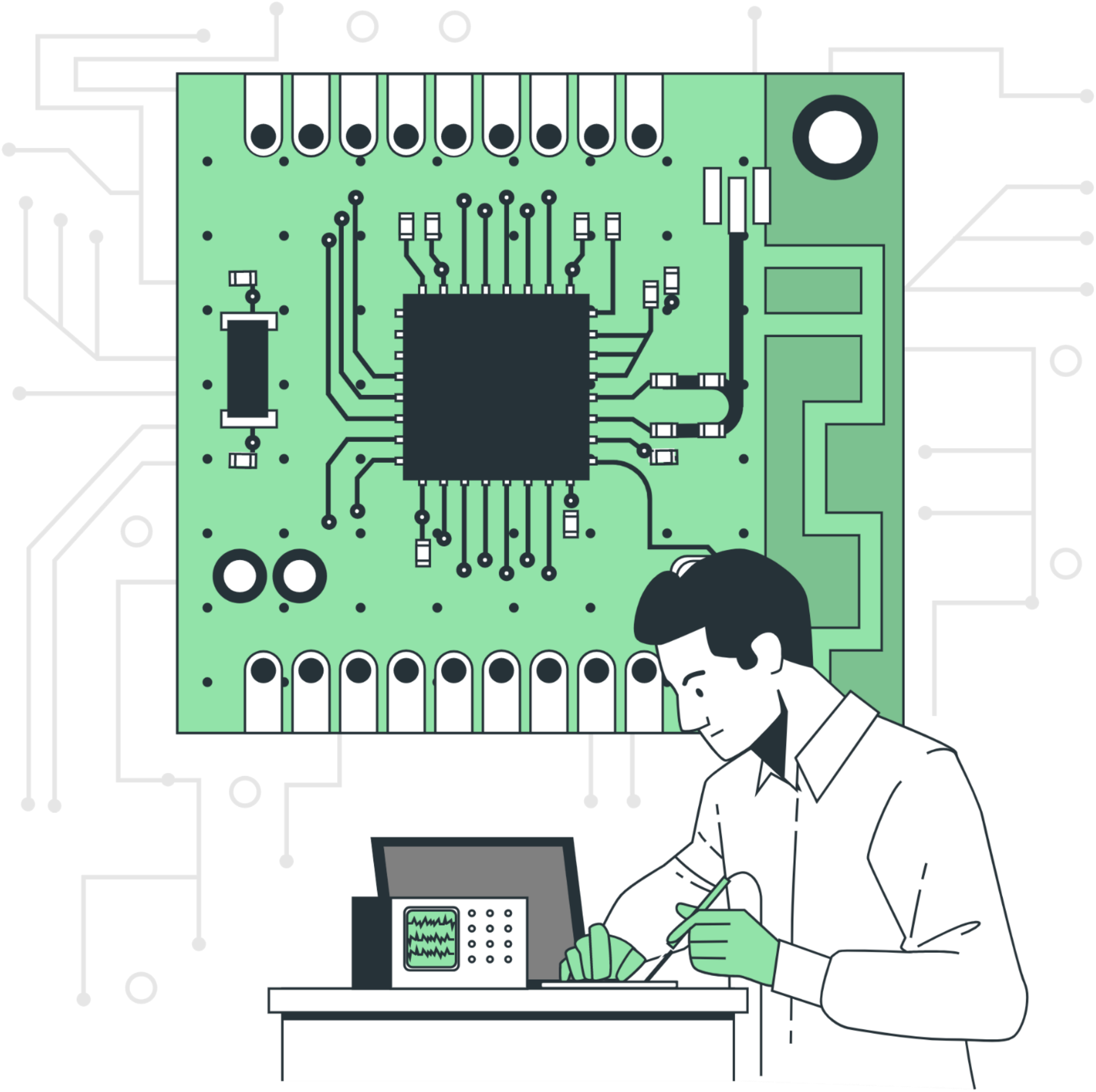


התגובה להלם

$$h(t)=\frac{\delta(t)}{R}+\frac{u(t)}{L}$$



VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

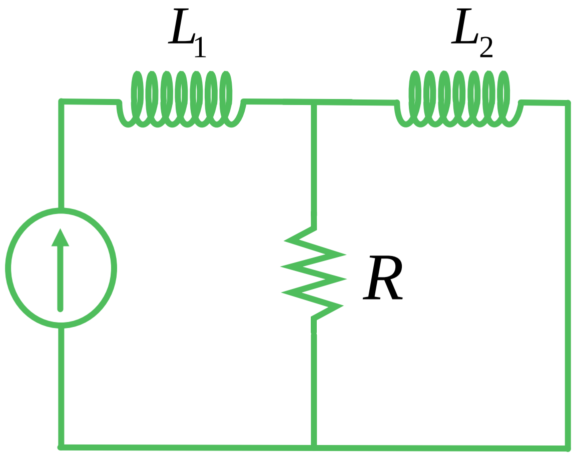
פרופ' אבישי אייל

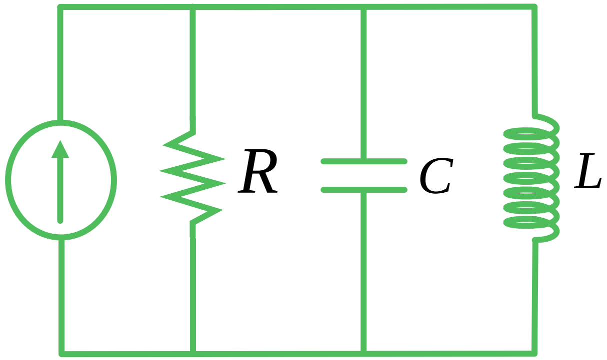
יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.4 : מעגלי סדר שני

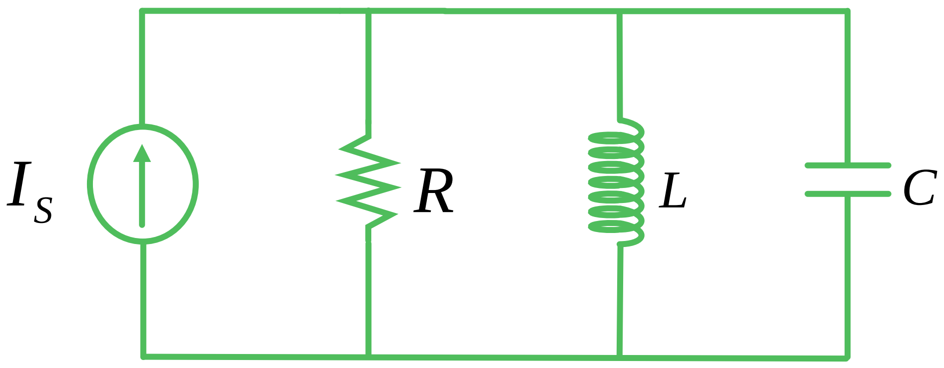
מעגלי סדר שני ← מערכות סדר שני

1. מעגלים המתוארים על ידי מד"ר מסדר שני
2. מעגלים שבהם שני רכיבים ריאקטיביים שלא ניתן לעשות להם שקול





מעגל RLC (מקבילי)



ZIR + ZSR

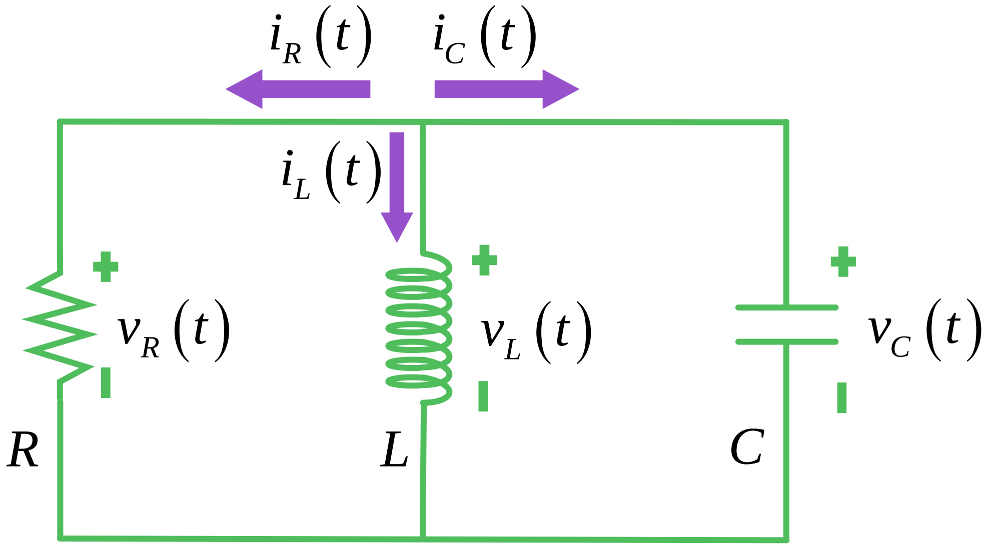
ZSRH + ZSRP

תגובה להלם

פתרון ההומוגנית

פתרון פרטי

מעגל RLC מקבילי - ZIR



מעגל RLC מקבילי - ZIR

KCL

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$$

KVL

$$v_R(t)=v_L(t)=v_C(t)$$

נגד

$$v_R(t)=Ri_R(t)$$

קבל

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\,dt'+v_C(0)=V_0$$

$$=V_0$$

סליל

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \qquad i_L(0)=I_0$$

נפתח משוואה לזרם הסליל

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$$

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{v_R(t)}{R}+i_L(t)+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

$$\frac{v_L(t)}{R}+i_L(t)+C\frac{dv_L(t)}{dt}=0$$

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)+CL\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}=0$$

מקבלים:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)+CL\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i_L(t)=0$$

$$i_L(0)=I_0$$

$$\frac{di_L(0)}{dt}=\frac{1}{L}v_L(0)=\frac{V_0}{L}$$

מקבלים:

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)+CL\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}=0$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i_L(t)=0\\[2em] i_L(0)=I_0\\[2em] \frac{di_L(0)}{dt}=\frac{V_0}{L}\end{gathered}}$$

נפתח משוואה למתח הקבל

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$$

$$\frac{v_R(t)}{R}+i_L(t)+i_C(t)=0$$

$$\frac{v_C(t)}{R}+i_L(t)+i_C(t)=0$$

$$\frac{v_C(t)}{R}+i_L(t)+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

$$\frac{v_C(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_0^t v_C(t')dt'+I_0+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{L}v_C(t)+C\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}=0$$

מקבלים

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{L}v_C(t)+C\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_C(t)=0$$

$$v_C(0)=V_0$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt}=\frac{1}{C}i_C(0)=\frac{1}{C}\left[-i_R(0)-i_L(0)\right]=$$

$$=-\frac{1}{C}\left[\frac{V_0}{R}+I_0\right]$$

מקבלים

$$\frac{1}{R}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{L}v_C(t)+C\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}=0$$

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_C(t)=0$$

$$v_C(0)=V_0$$

$$\frac{dv_C(0)}{dt}=-\frac{1}{C}\left[\frac{V_0}{R}+I_0\right]$$

פתרון:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = 0$$

נסמן:

תדר התהודה $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

מקדם הריסון $\alpha = \frac{1}{2RC}$

מקבלים:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

פתרון:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

$$\underbrace{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}_{\text{פולינום אופייני}} = 0$$

$$\alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d$$

השורשים האופייניים או התדרים הטבעיים של המערכת

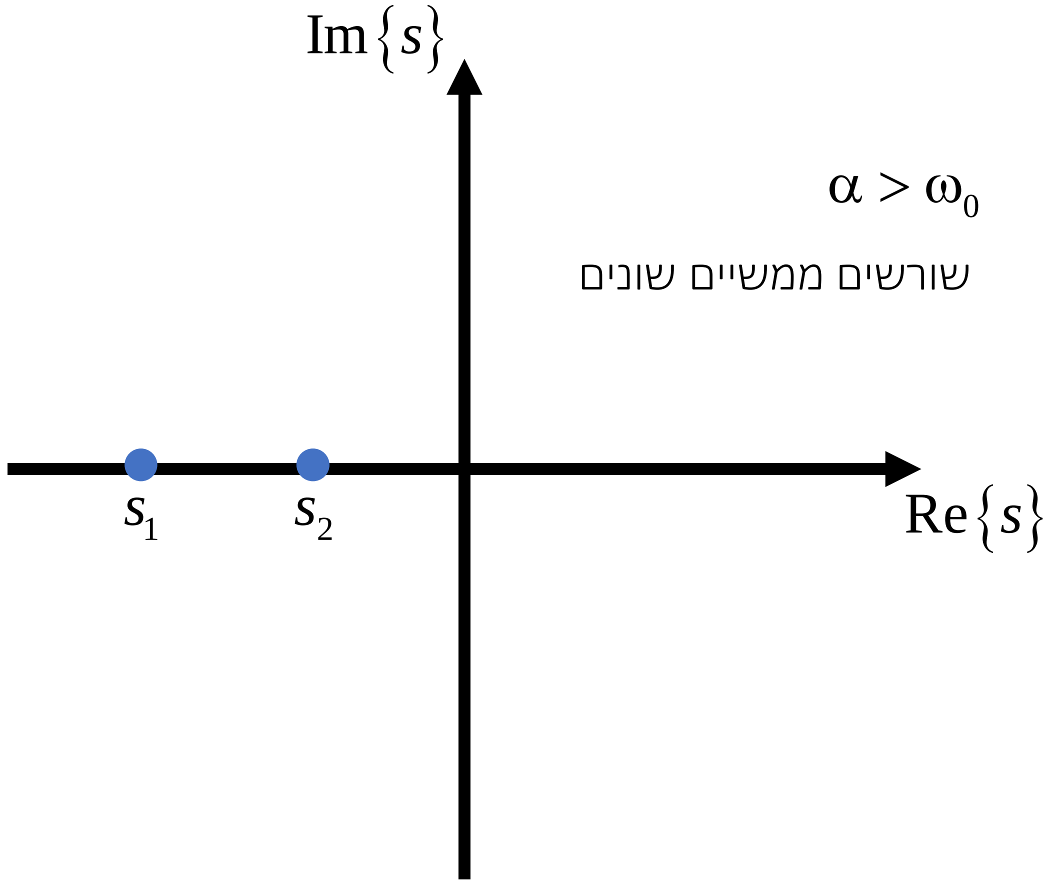
סוגי פתרון:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d$$

$\alpha > \omega_0$	שורשים ממשיים שונים	**ריסון יתר**
$\alpha < \omega_0$	שורשים מרוכבים צמודים	**תת ריסון**
$\alpha = \omega_0$	שורש יחיד	**ריסון קריטי**
$\alpha = 0$	שורשים מדומים ממש	**חסר הפסדים**

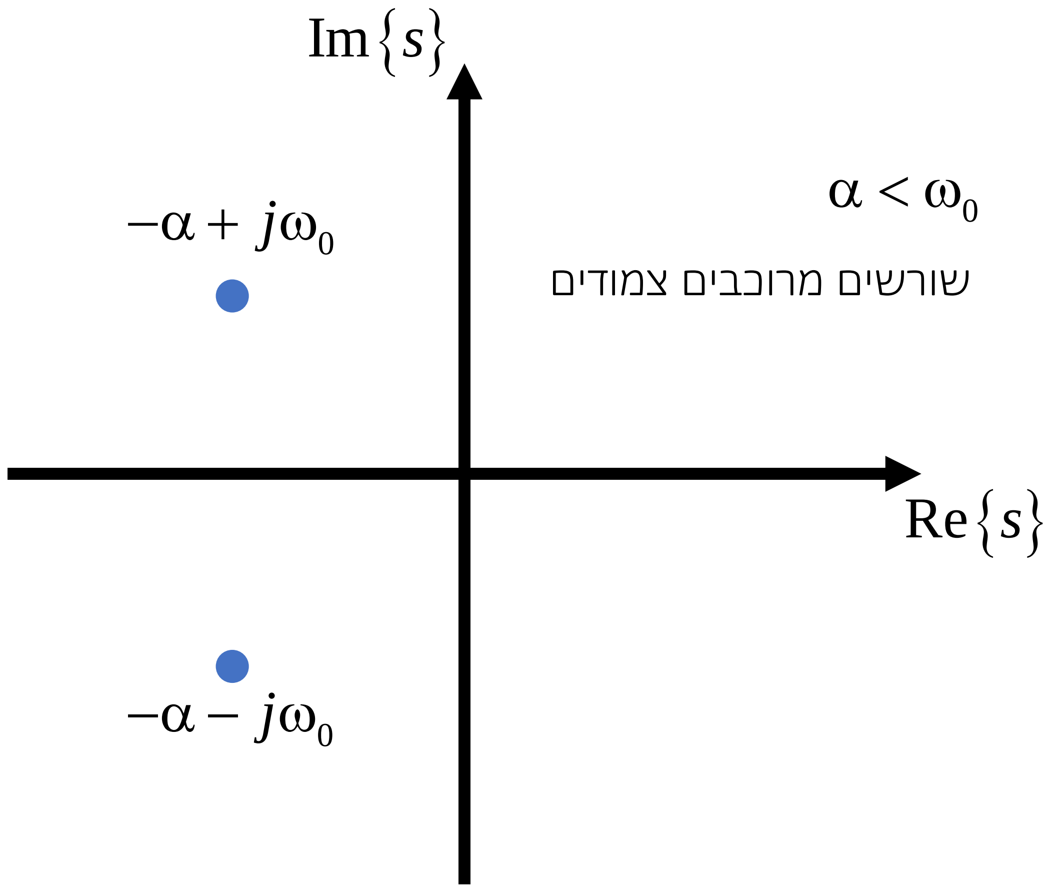
סוגי פתרון: ריסון יתר



$\alpha > \omega_0$

שורשים ממשיים שונים

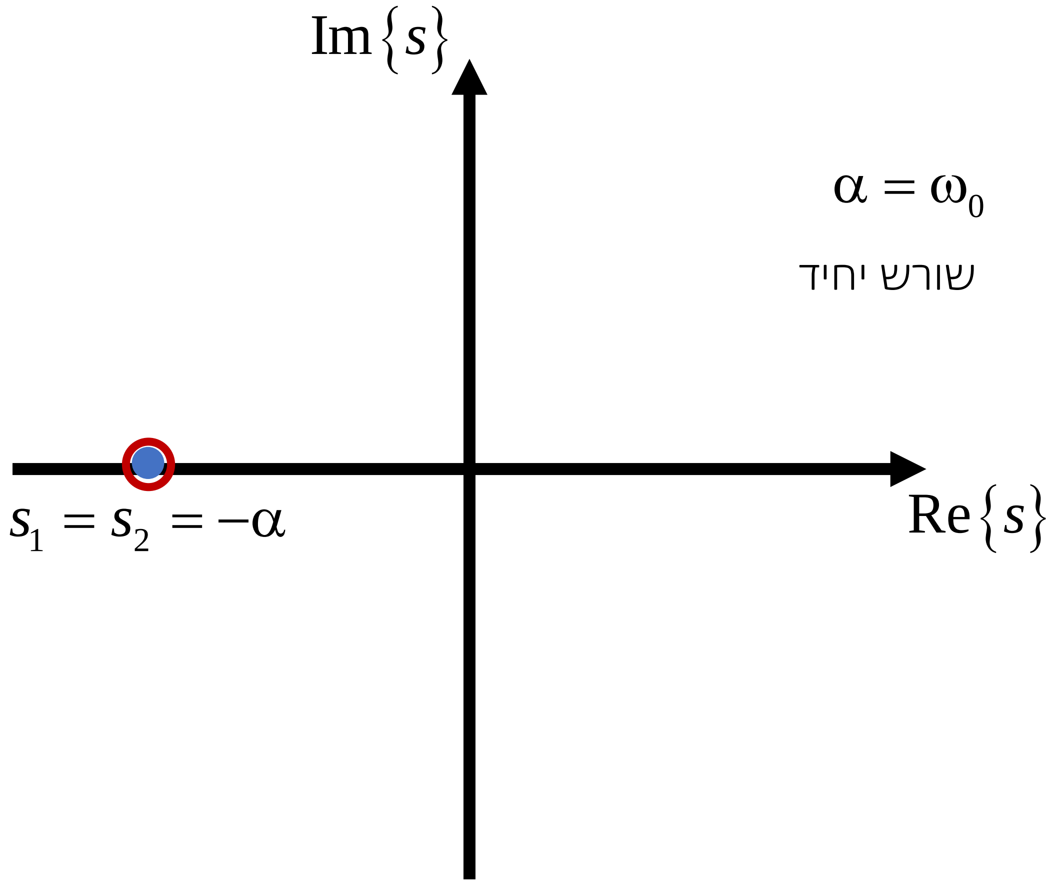
סוגי פתרון: תת ריסון



$\alpha < \omega_0$

שורשים מרוכבים צמודים

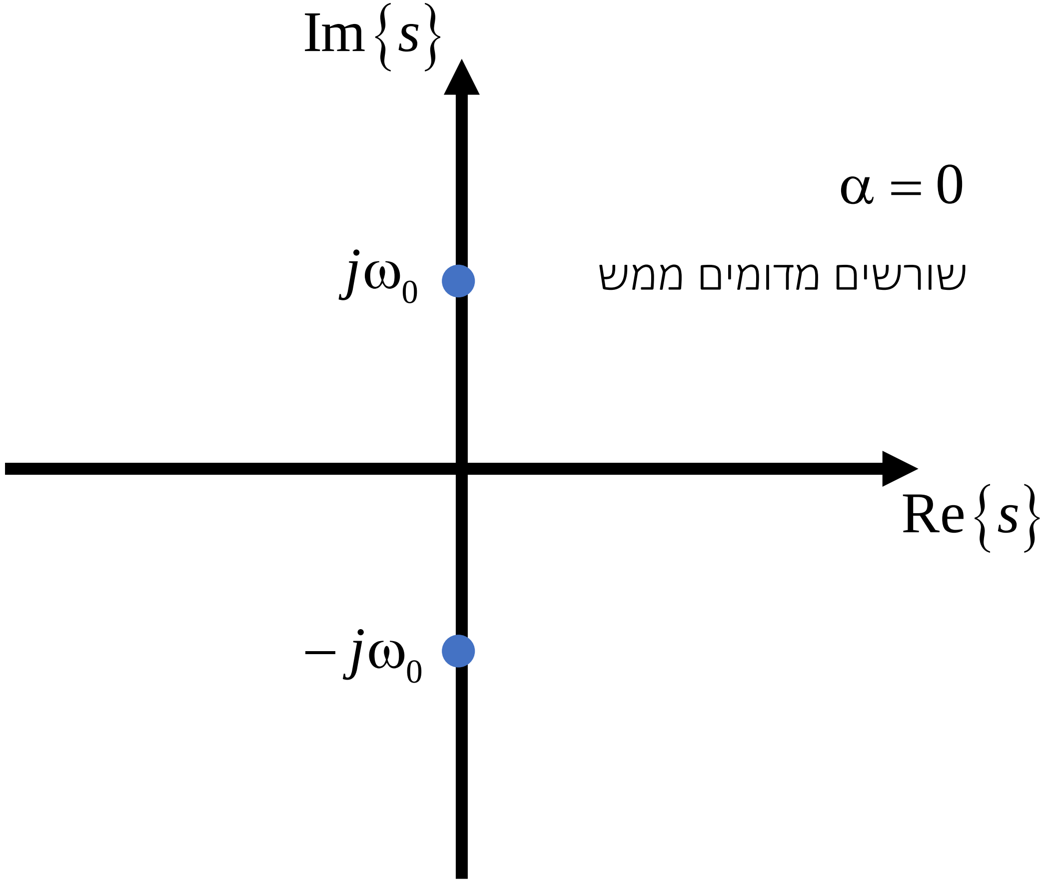
סוגי פתרון: ריסון קריטי



$\alpha = \omega_0$

שורש יחיד

סוגי פתרון: חסר הפסדים



$\alpha = 0$

שורשים מדומים ממש

ריסון יתר – Overdamped

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d$$

$\alpha > \omega_0$ שורשים ממשיים שונים

$$i_L(t) = k_1 e^{-(\alpha-\alpha_d)t} + k_2 e^{-(\alpha+\alpha_d)t}$$

תנאי התחלה:

$$I_0 = k_1 + k_2$$

$$\frac{V_0}{L} = -k_1(\alpha - \alpha_d) - k_2(\alpha + \alpha_d)$$

Overdamped – ריסון יתר

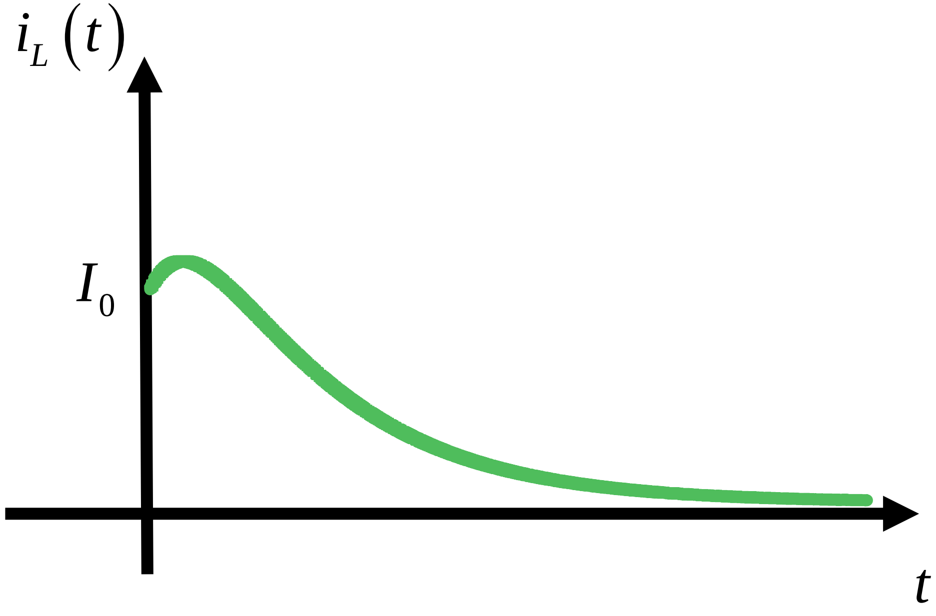
$$i_L(t) = k_1 e^{-(\alpha-\alpha_d)t} + k_2 e^{-(\alpha+\alpha_d)t}$$

$$i_L(t) = \frac{V_0/L + I_0(\alpha_d + \alpha)}{2\alpha_d} e^{-(\alpha-\alpha_d)t} + \\ + \frac{-V_0/L + I_0(\alpha_d - \alpha)}{2\alpha_d} e^{-(\alpha+\alpha_d)t}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\frac{V_0}{L} - I_0 s_2\right) e^{s_1 t} + \\ + \frac{1}{s_2 - s_1}\left(\frac{V_0}{L} - I_0 s_1\right) e^{s_2 t}$$

Overdamped – ריסון יתר

$$i_L(t) = \frac{1}{s_1 - s_2}\left(\frac{V_0}{L} - I_0 s_2\right)e^{s_1 t} +$$
$$+\frac{1}{s_2 - s_1}\left(\frac{V_0}{L} - I_0 s_1\right)e^{s_2 t}$$



Underdamped - תת-ריסון

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d$$

$\alpha < \omega_0$ שורשים מרוכבים צמודים

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

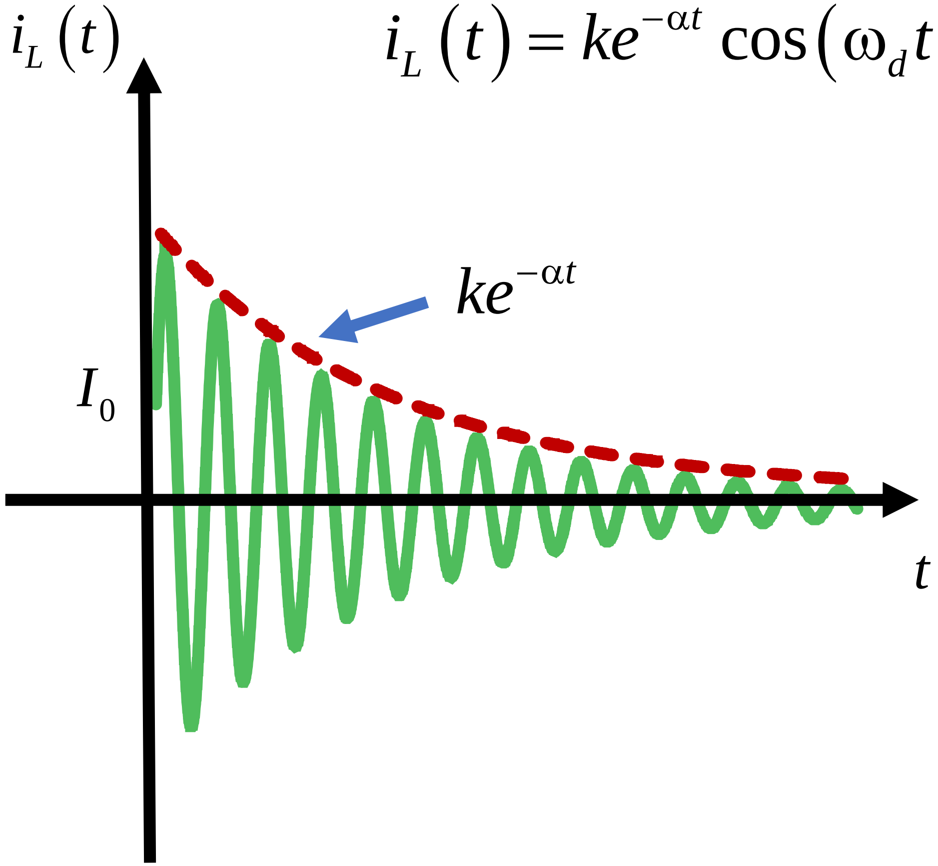
$$s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

פתרון:

$$i_L(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

Underdamped - תת-ריסון

$$i_L(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$



ריסון קריטי - Critically damped

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d$$

$\alpha = \omega_0$ שורש יחיד

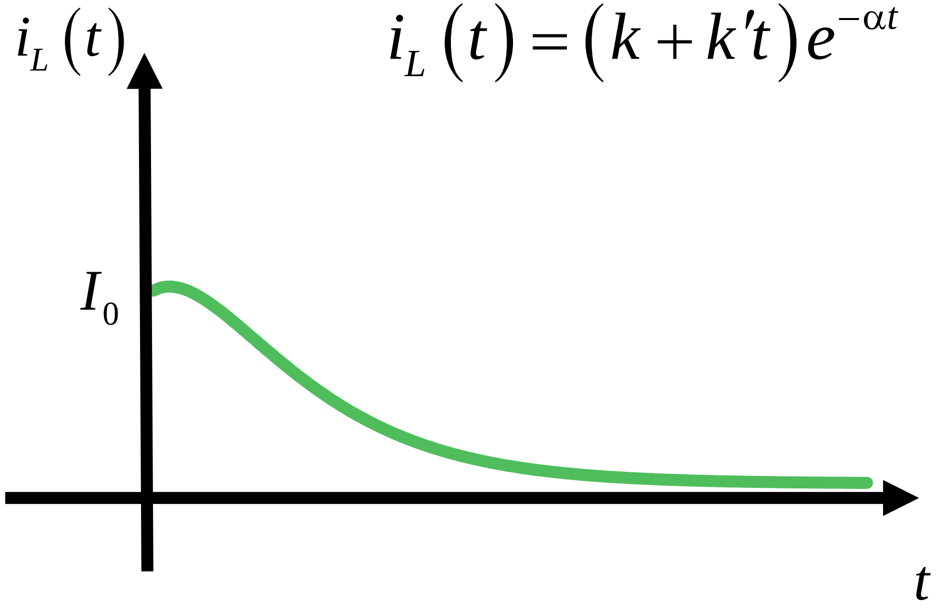
$$s_1 = s_2 = -\alpha$$

פתרון:

$$i_L(t) = (k + k't)e^{-\alpha t}$$

Critically damped - ריסון קריטי

$$i_L(t) = (k + k't)e^{-\alpha t}$$



חסר הפסדים – Lossless

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \alpha_d$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \alpha_d$$

$\alpha = 0$ שורשים מדומים ממש

$$s_1 = j\omega_0$$

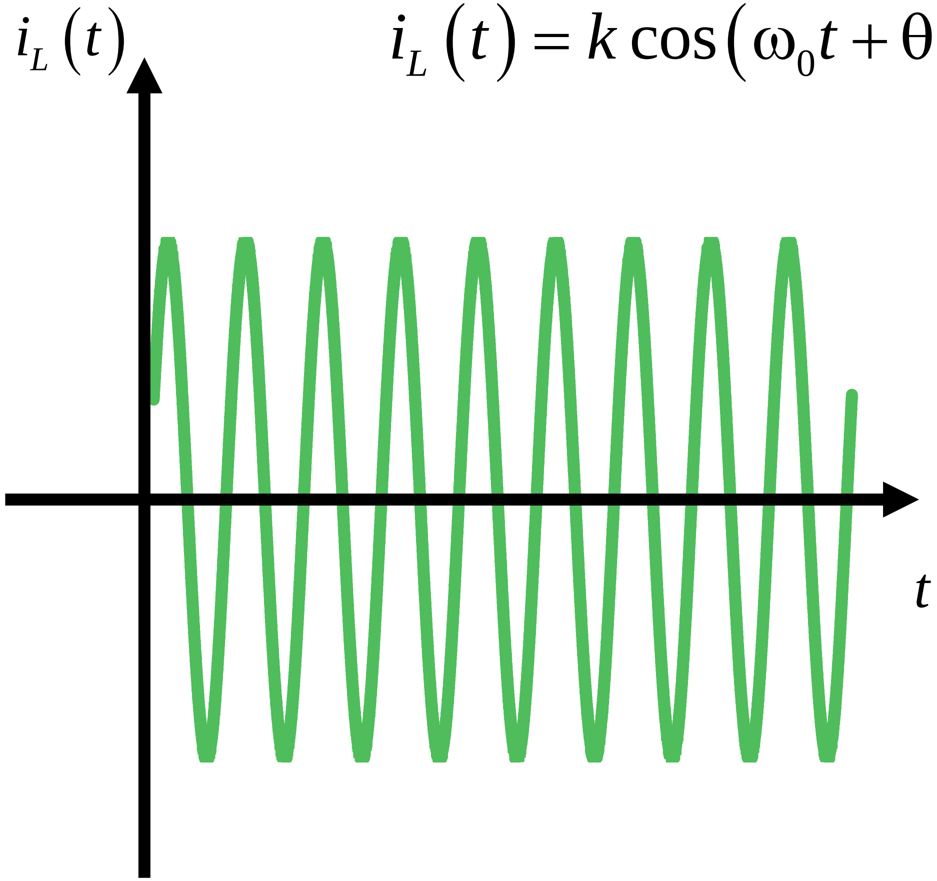
$$s_2 = -j\omega_0$$

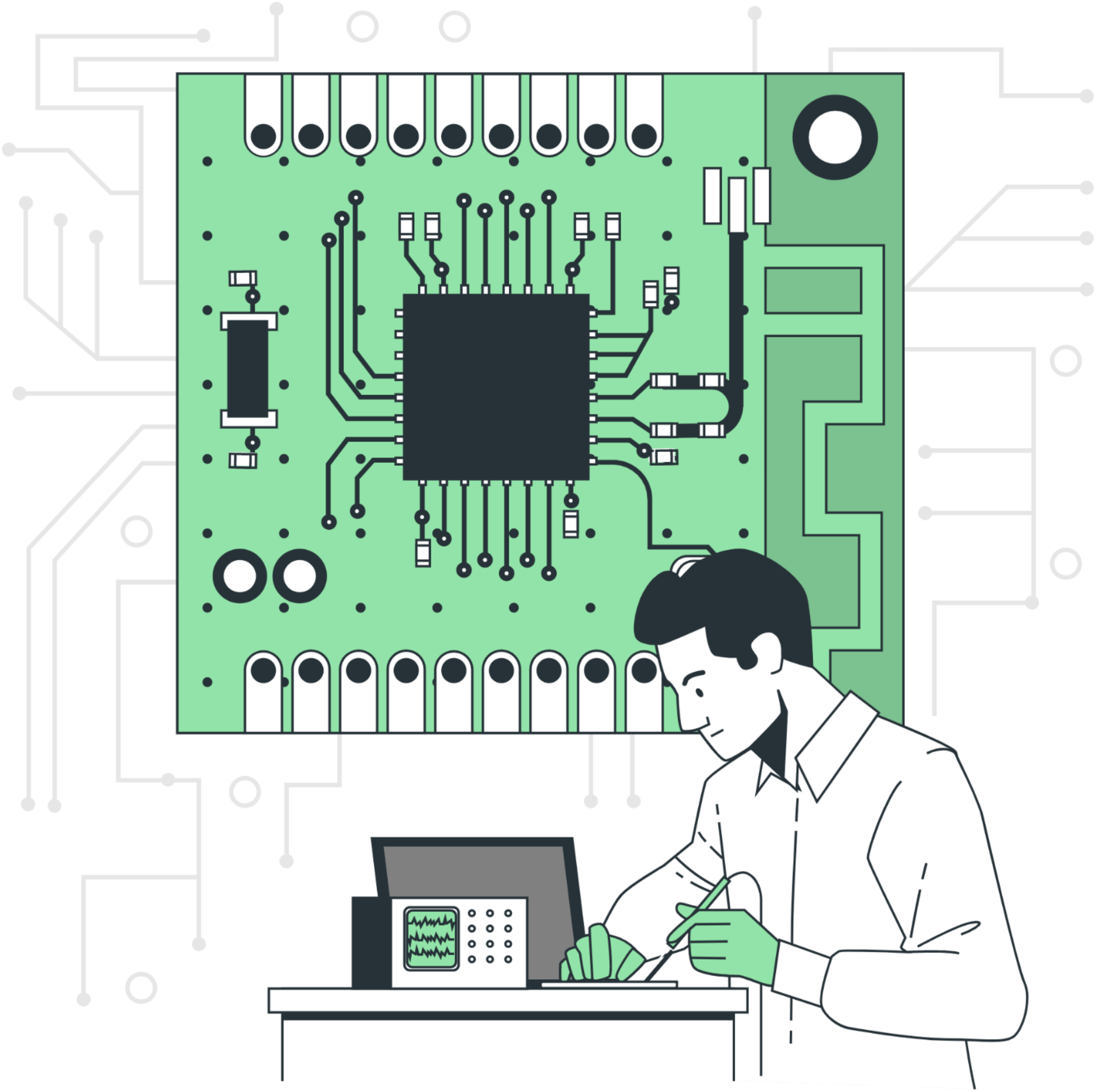
פתרון:

$$i_L(t) = k\cos(\omega_0 t + \theta)$$

Lossless – חסר הפסדים

$$i_L(t) = k\cos(\omega_0 t + \theta)$$





מעגלים ומערכות לינאריות

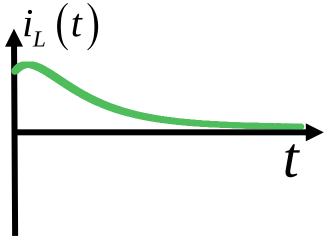
פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

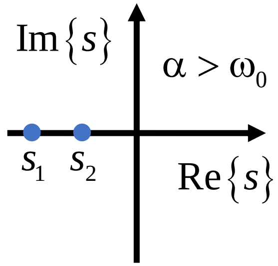
מקטע 4.5 : מעגלי סדר שני – חלק שני

מעגל RLC מקבילי - ZIR

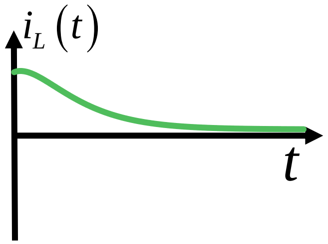
ריסון יתר



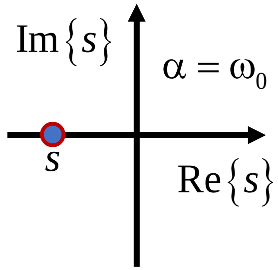
$$i_L(t)=\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{V_0}{L}-I_0 s_2\right)e^{s_1 t}+\frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{V_0}{L}-I_0 s_1\right)e^{s_2 t}$$



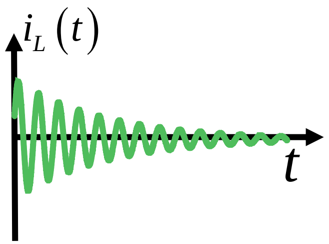
ריסון קריטי



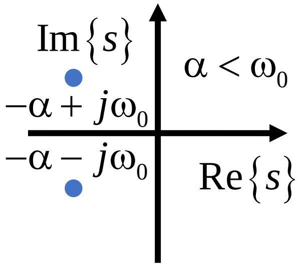
$$i_L(t)=\left[I_0+\left(\frac{V_0}{L}+\alpha I_0\right)t\right]e^{-\alpha t}$$



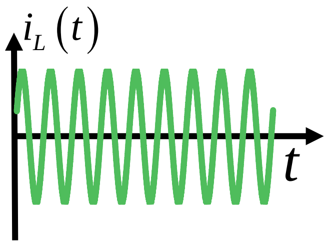
תת ריסון



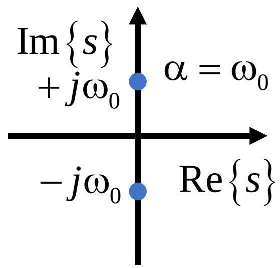
$$i_L(t)=\left[I_0\cos(\omega_d t)+\frac{1}{\omega_d}\left(\frac{V_0}{L}+\alpha I_0\right)\sin(\omega_d t)\right]e^{-\alpha t}$$



חסר הפסדים

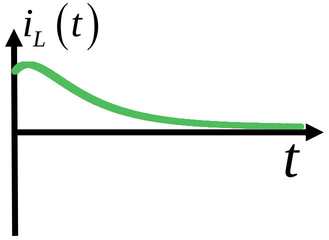


$$i_L(t)=\left[I_0\cos(\omega_0 t)+\frac{1}{\omega_0}\frac{V_0}{L}\sin(\omega_0 t)\right]$$

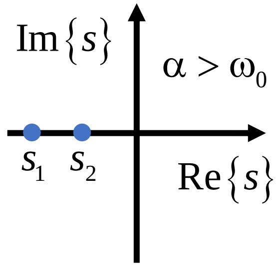


מעגל RLC מקבילי - ZIR

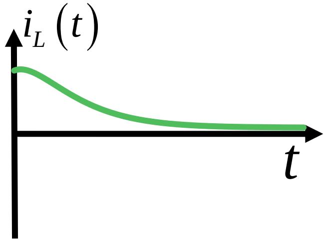
ריסון יתר



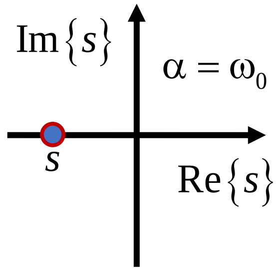
$$i_L(t)=\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{V_0}{L}-I_0 s_2\right)e^{s_1 t}+\frac{1}{s_2-s_1}\left(\frac{V_0}{L}-I_0 s_1\right)e^{s_2 t}$$



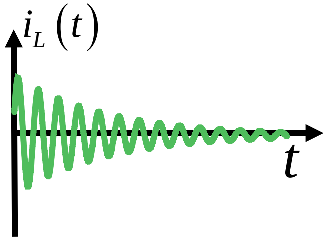
ריסון קריטי



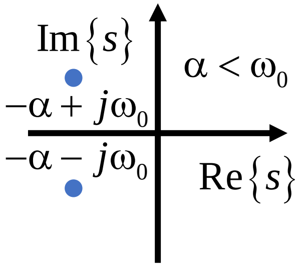
$$i_L(t)=\left[I_0+\left(\frac{V_0}{L}+\alpha I_0\right)t\right]e^{-\alpha t}$$



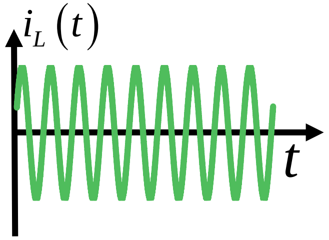
תת ריסון



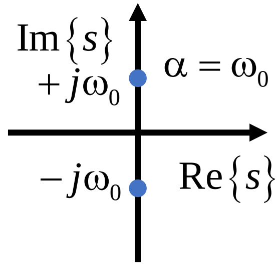
$$i_L(t)=ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\phi)$$



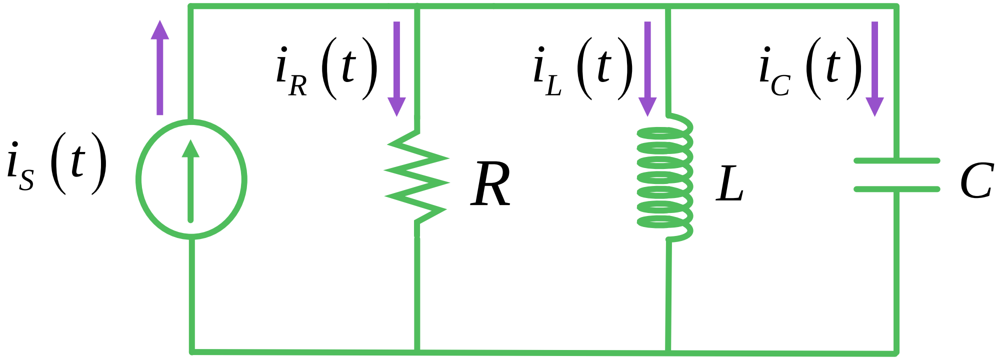
חסר הפסדים



$$i_L(t)=k\cos(\omega_0 t+\phi)$$



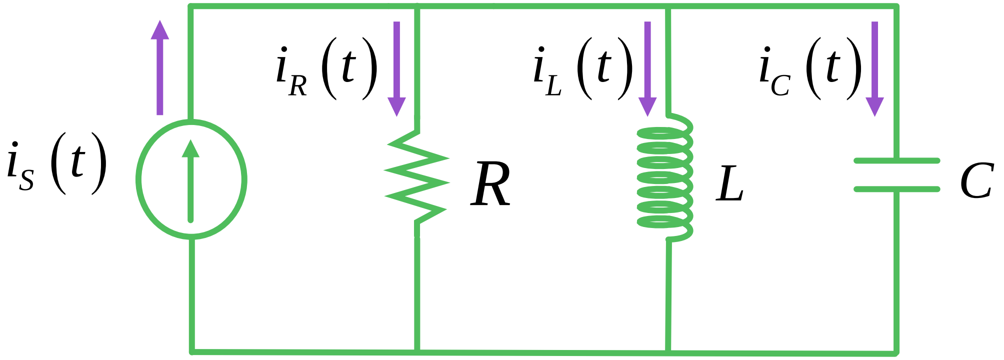
מעגל RLC מקבילי - ZSR



ZSR = ZSRH + ZSRP

פתרון ההומוגנית   פתרון פרטי

מעגל RLC מקבילי - ZSR



$$i_L(0)=0 \qquad v_C(0)=0$$

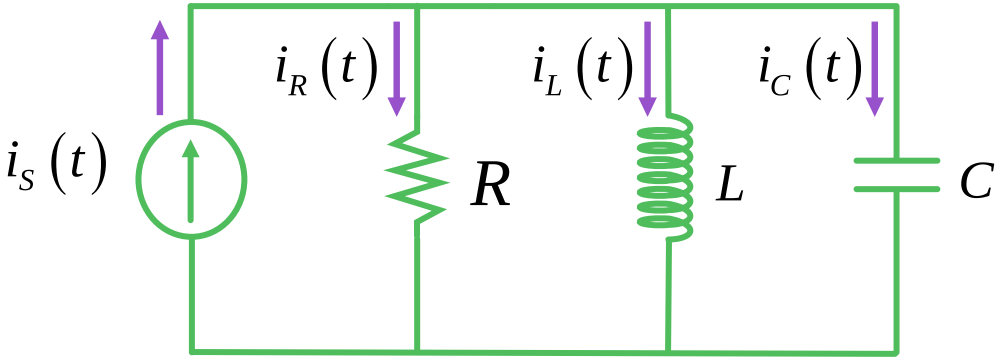
KCL

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$$

סליל

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

מעגל RLC מקבילי - ZSR



$$i_L(0)=0 \qquad v_C(0)=0$$

KCL

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} \quad + \quad i_L(t) \quad + \quad CL\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} \quad = i_S(t)$$

מעגל RLC מקבילי - ZSR

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i_L(t)=\frac{1}{LC}i_S(t)$$

$$i_L(0)=\frac{di_L(0)}{dt}=0$$

מעגל RLC מקבילי - ZSR

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{1}{LC} i_S(t)$$

$$i_L(0) = \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC} \qquad \alpha_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

ריסון יתר

$$i_L(t) = k_1 e^{-(\alpha-\alpha_d)t} + k_2 e^{-(\alpha+\alpha_d)t}$$

ריסון קריטי

$$i_L(t) = (k + k't)e^{-\alpha t}$$

תת ריסון

$$i_L(t) = ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \theta)$$

חסר הפסדים

$$i_L(t) = k\cos(\omega_0 t + \theta)$$

פתרון פרטי – תגובה למדרגה

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{1}{LC} i_S(t)$$

$$i_S(t) = u(t)$$

$$t > 0$$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{1}{LC}$$

$$i_L^p(t) = 1 \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

פתרון ZSR – תגובה למדרגה

$$i_L^p(t) = 1$$

עבור המקרה של ריסון יתר:

$$i_L(t) = \underbrace{k_1 e^{-(\alpha-\alpha_d)t} + k_2 e^{-(\alpha+\alpha_d)t}}_{\text{פתרון ההומוגנית}} \underbrace{+1}_{\text{פתרון פרטי}}$$

$$i_L(0) = \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

פתרון ZSR – תגובה למדרגה

$$k_1 + k_2 + 1 = 0$$

$$k_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2}$$

$$s_1 k_1 + s_2 k_2 = 0$$

$$k_2 = \frac{-s_1}{s_1 - s_2}$$

$t > 0$

$$i_L(t) = \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} + 1$$

$$i_L(t) = \left(\frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} + 1 \right) u(t)$$

פתרון ZSR – תגובה להלם

$$s(t)=\left(\frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t}-\frac{s_1}{s_1-s_2}e^{s_2 t}+1\right)u(t)$$

$$h(t)=\left(\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t}-\frac{s_2 s_1}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)u(t)+$$

$$\cancel{+\left(\frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_1 t}-\frac{s_1}{s_1-s_2}e^{s_2 t}+1\right)\delta(t)}$$

פתרון פרטי – מקור AC

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{1}{LC} i_S(t)$$

$$i_S(t) = I_S \cos(\omega t) u(t)$$

$t > 0$

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{I_S}{LC} \cos(\omega t)$$

$$i_L^p(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

פתרון פרטי – מקור AC

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{I_S}{LC}\cos(\omega t)$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) - 2\alpha\omega A\sin(\omega t+\phi) +$$
$$+\omega_0^2 A\cos(\omega t+\phi) = \frac{I_S}{LC}\cos(\omega t)$$

$$-\omega^2 A e^{j\phi} + j2\alpha\omega A e^{j\phi} + \omega_0^2 A e^{j\phi} = \frac{I_S}{LC}$$

$$Ae^{j\phi} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha\omega j + \omega_0^2 - \omega^2} I_S$$

פתרון פרטי – מקור AC

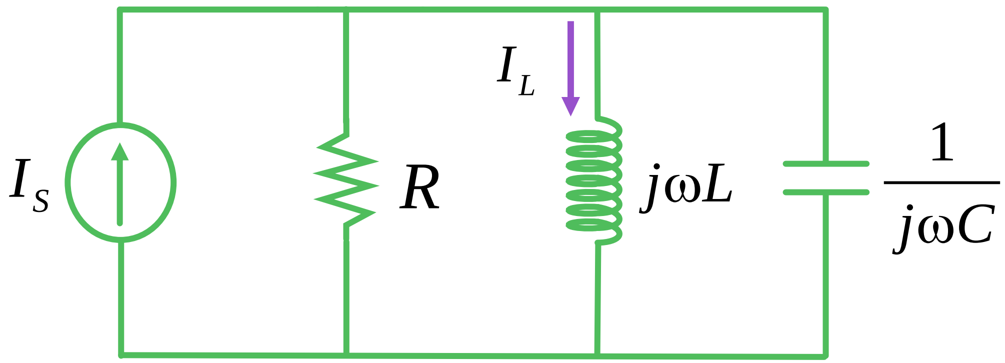
$$Ae^{j\phi} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha\omega j + \omega_0^2 - \omega^2} I_S$$

$$i_L(t) = \Big[\underbrace{k_1 e^{s_1 t} - k_2 e^{s_2 t}}_{\text{תופעת מעבר}} + \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{\text{מצב מתמיד}}\Big] u(t)$$

$$i_L(0) = \frac{di_L(0)}{dt} = 0$$

פתרון פרטי – מקור AC

$$Ae^{j\phi} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha\omega j + \omega_0^2 - \omega^2} I_S$$



$$I_L = \frac{\frac{1}{j\omega L}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} I_S$$

פתרון פרטי – מקור AC

$$I_L = \frac{\dfrac{1}{j\omega L}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{j\omega L} + j\omega C} I_S \qquad \times \frac{\dfrac{j\omega}{C}}{\dfrac{j\omega}{C}}$$

$$I_L = \frac{\dfrac{1}{LC}}{\dfrac{j\omega}{RC} + \dfrac{1}{LC} - \omega^2} I_S \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

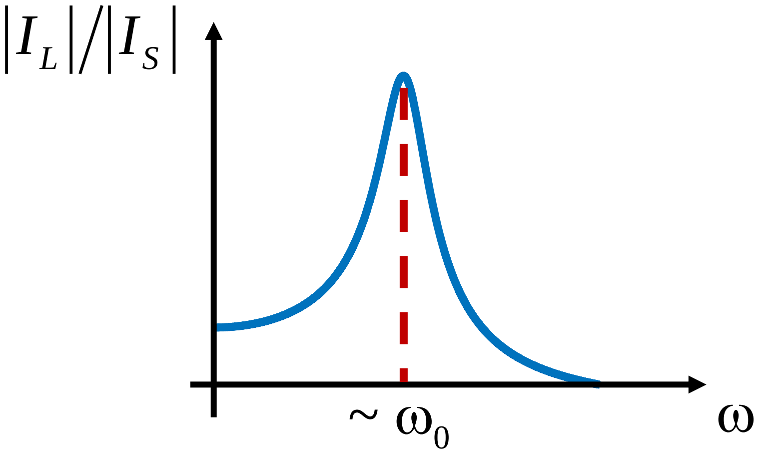
$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$I_L = \frac{\omega_0^2}{2\alpha\omega j + \omega_0^2 - \omega^2} I_S$$

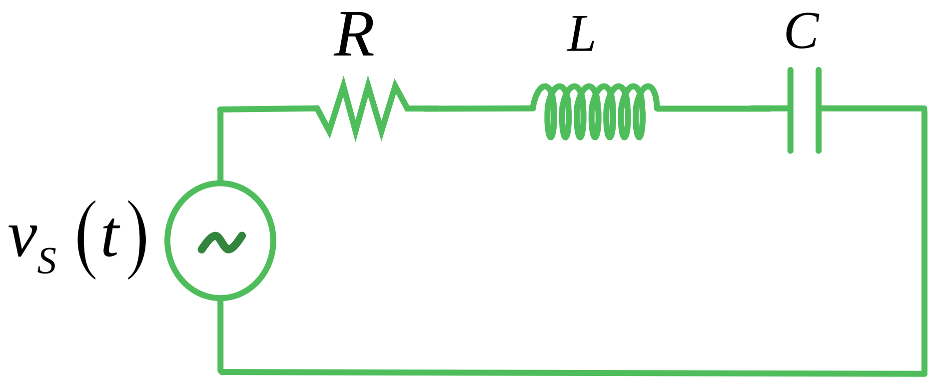
תהודה

$$I_L = \frac{\omega_0^2}{2\alpha\omega j + \omega_0^2 - \omega^2} I_S$$

$$\frac{|I_L|}{|I_S|} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\alpha^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}}$$



מעגל RLC טורי



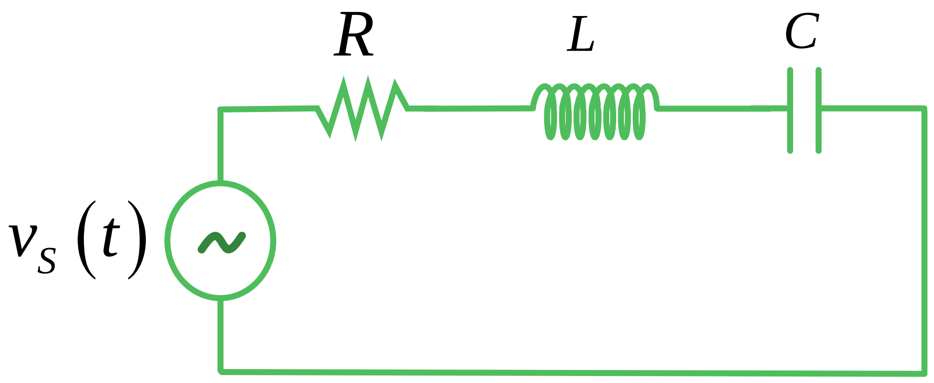
KVL

$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=v_S(t)$$

קבל

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

מעגל RLC טורי



KVL

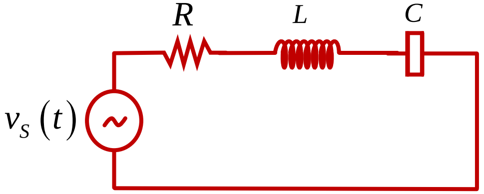
$$v_R(t)+v_L(t)+v_C(t)=v_S(t)$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+v_C(t)=v_S(t)$$

מעגל RLC טורי

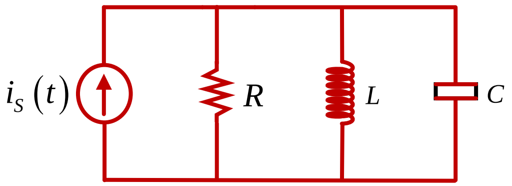
$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C(t)}{dt} + \omega_0^2 v_C(t) = \frac{1}{LC} v_S(t)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{R}{2L}$$

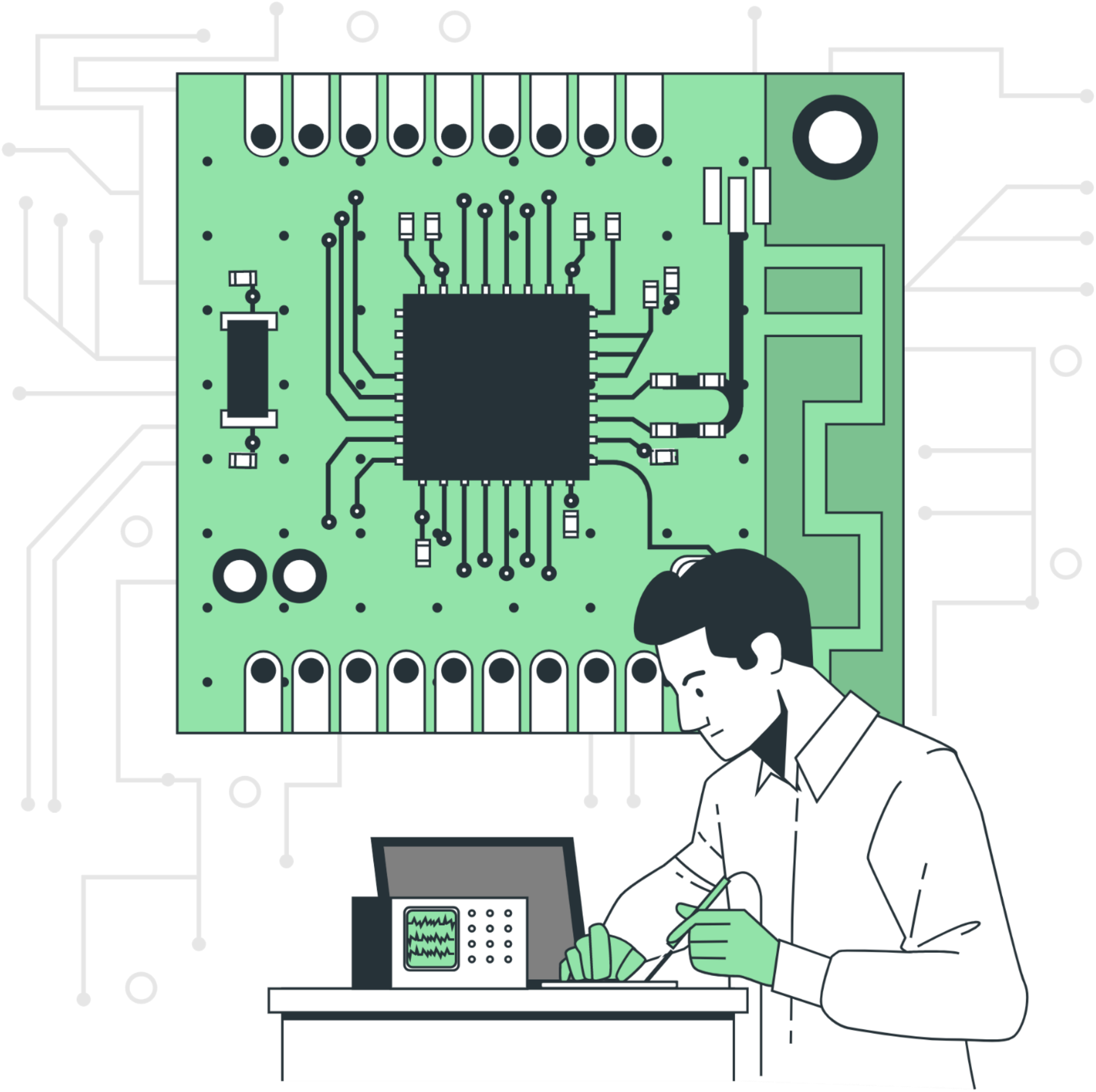


$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = \frac{1}{LC} i_S(t)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \alpha = \frac{1}{2RC}$$



VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



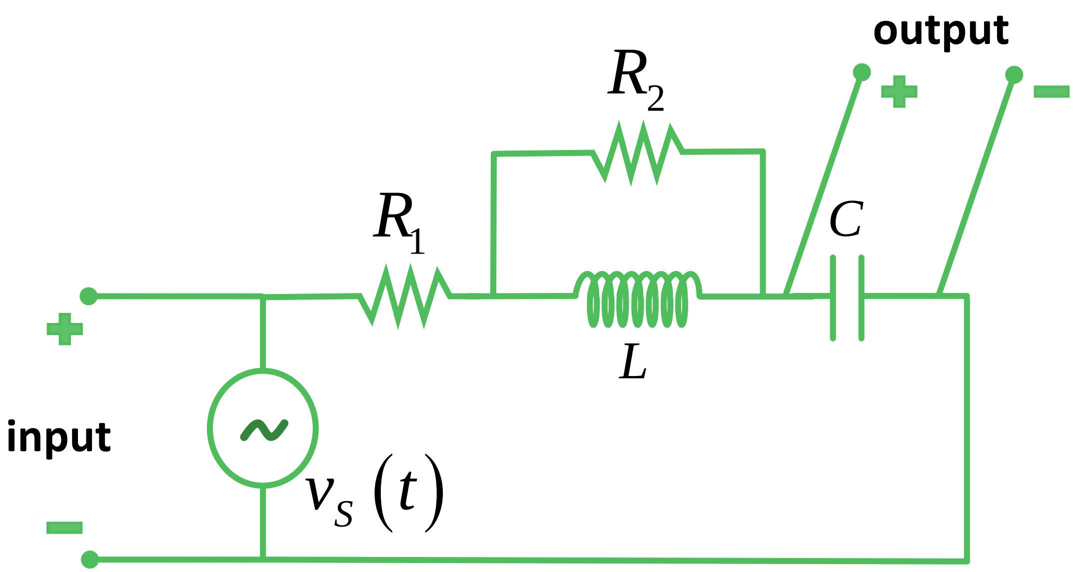
מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.6 : מעגלי סדר שני – חלק שלישי

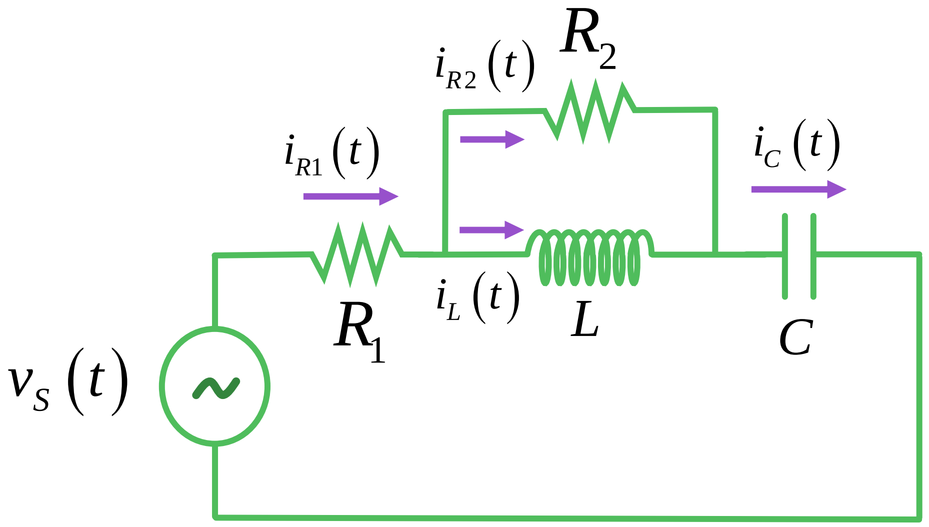
מעגל סדר שני כללי



במעגל שלפנינו מתח המקור הוא הכניסה
ומתח הקבל הוא המוצא.

מצא את תגובת ההלם של המעגל

מעגל סדר שני כללי

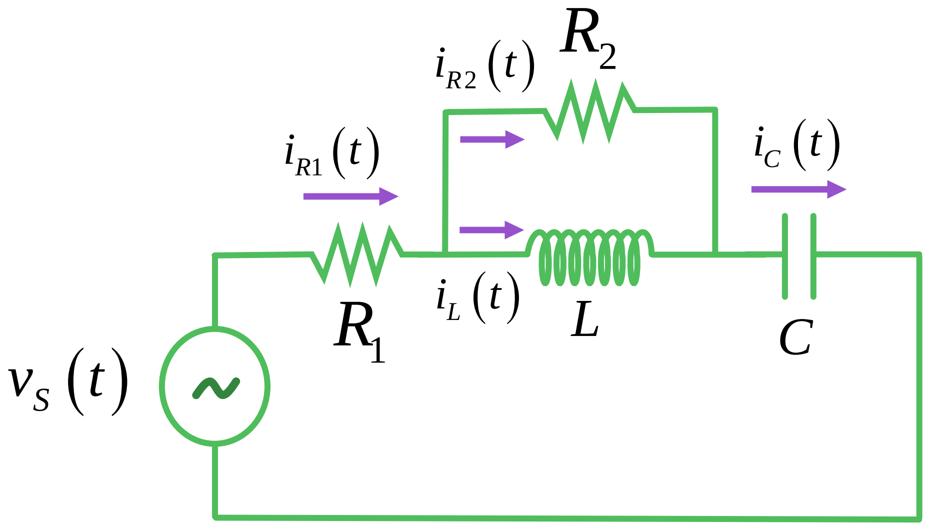


$$v_{R1}(t)+v_L(t)+v_C(t)=v_S(t)$$ **KVL**

$$v_{R2}(t)=v_L(t)$$

$$i_{R1}(t)=i_C(t)=i_{R2}(t)+i_L(t)$$ **KCL**

מעגל סדר שני כללי



$$v_{R1}(t) = i_{R1}(t)R_1$$

$$v_{R1}(t) = i_C(t)R_1$$

$$v_{R1}(t) = CR_1\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

מעגל סדר שני כללי

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

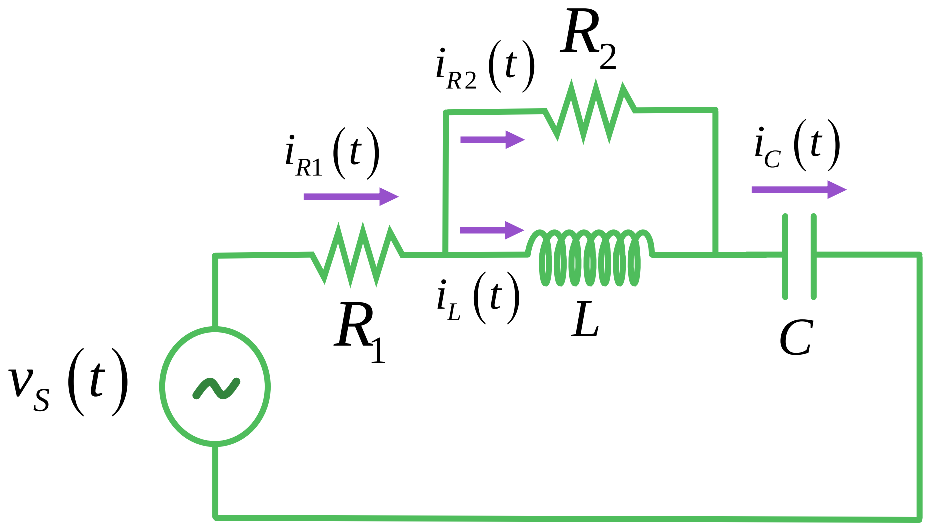
$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}\left[i_C(t) - i_{R2}(t)\right]$$

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}\left[C\frac{dv_C}{dt} - \frac{v_S - v_{R1} - v_C}{R_2}\right]$$

$$v_L(t) = LC\frac{d^2 v_C}{dt^2} - \frac{L}{R_2}\left[\frac{dv_S}{dt} - CR_1\frac{d^2 v_C}{dt^2} - \frac{dv_C}{dt}\right]$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגל סדר שני כללי



KVL

$$v_{R1}(t)+v_L(t)+v_C(t)=v_S(t)$$

$$LC\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{d^2v_C}{dt^2}+\left(CR_1+\frac{L}{R_2}\right)\frac{dv_C}{dt}+v_C=v_S+\frac{L}{R_2}\frac{dv_S}{dt}$$

מעגל סדר שני כללי

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \omega_0^2 v_S + \frac{1}{R_S C}\frac{dv_S}{dt}$$

$$R_S = R_1 + R_2 \qquad R_P = R_1 \parallel R_2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_P}{R_1}} \qquad 2\alpha = \frac{R_P}{L} + \frac{1}{R_S C}$$

$$v_C(0) = \frac{dv_C(0)}{dt} = 0$$

תגובה למדרגה

$$\underbrace{\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C}_{\text{אגף הנעלמים}} = \underbrace{\omega_0^2 v_S + \frac{1}{R_S C}\frac{dv_S}{dt}}_{\text{אגף המקורות}}$$

נציב: $v_S = u(t)$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \omega_0^2 u(t) + \frac{1}{R_S C}\delta(t)$$

תגובה למדרגה

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \underbrace{\omega_0^2 u(t)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{R_S C}\delta(t)}_{2}$$

נניח שאנחנו בריסון יתר:

$$v_C^H(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

פתרון ZSR עבור מחובר A

$$v_C^1(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1$$

תגובה למדרגה

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \underbrace{\omega_0^2 u(t)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{R_S C}\delta(t)}_{2}$$

פתרון עבור מחובר א'

$$v_C^1(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1$$

$$k_1 + k_2 + 1 = 0 \qquad k_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2}$$

$$s_1 k_1 + s_2 k_2 = 0 \qquad k_2 = \frac{s_1}{s_2 - s_1}$$

תגובה למדרגה

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \underbrace{\omega_0^2 u(t)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{R_S C}\delta(t)}_{2}$$

פתרון עבור מחובר א'

$$v_C^1(t) = \left(k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1\right) u(t)$$

פתרון עבור מחובר ב'

$$\boxed{\text{מחובר ב'}} = \frac{1}{R_S C}\frac{1}{\omega_0^2}\boxed{\text{מחובר א'}}$$

תגובה למדרגה

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C}{dt} + \omega_0^2 v_C = \underbrace{\omega_0^2 u(t)}_{1} + \underbrace{\frac{1}{R_S C}\delta(t)}_{2}$$

פתרון עבור מחובר א'

$$v_C^1(t) = \left(k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1\right) u(t)$$

פתרון עבור מחובר ב'

$$v_C^2(t) = \frac{1}{R_S C}\frac{1}{\omega_0^2}\left(k_1 s_1 e^{s_1 t} + k_2 s_2 e^{s_2 t}\right) u(t)$$

תגובה למדרגה

$$v_C(t) = \left(k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1\right) u(t) +$$

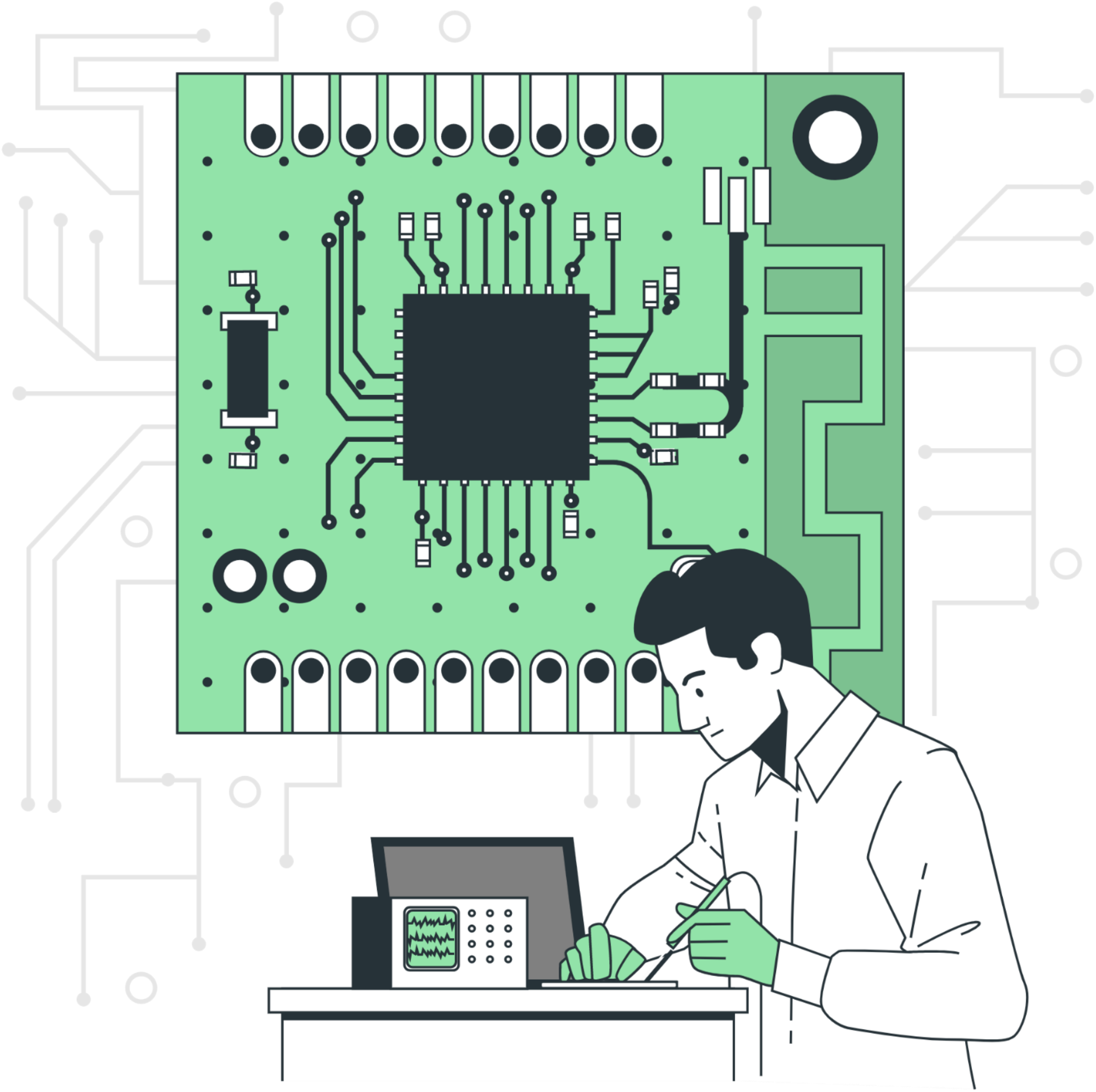
$$+ \frac{1}{R_S C} \frac{1}{\omega_0^2} \left(k_1 s_1 e^{s_1 t} + k_2 s_2 e^{s_2 t}\right) u(t)$$

תגובה להלם

$$s(t)=\left(k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}+1\right)u(t)+$$
$$+\frac{1}{R_SC}\frac{1}{\omega_0^2}\left(k_1s_1e^{s_1t}+k_2s_2e^{s_2t}\right)u(t)$$

$$h(t)=\left(k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}\right)u(t)+$$
$$\cancel{+\left(k_1e^{s_1t}+k_2e^{s_2t}+1\right)\delta(t)+}$$
$$+\frac{1}{R_SC}\frac{1}{\omega_0^2}\left(k_1s_1^2e^{s_1t}+k_2s_2^2e^{s_2t}\right)u(t)+$$
$$\cancel{+\frac{1}{R_SC}\frac{1}{\omega_0^2}\left(k_1s_1e^{s_1t}+k_2s_2e^{s_2t}\right)\delta(t)}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

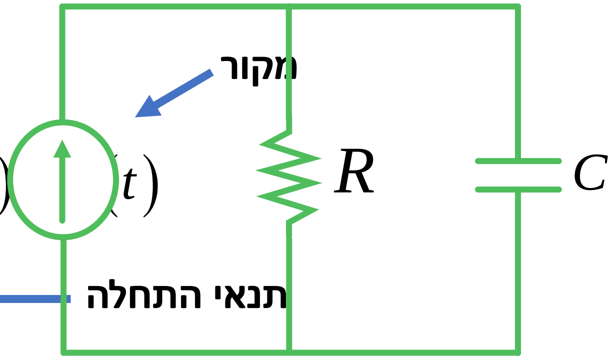
יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.7 : פתרון מערכת מסדר כללי

סיכום ביניים:

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)\ldots(t)$$

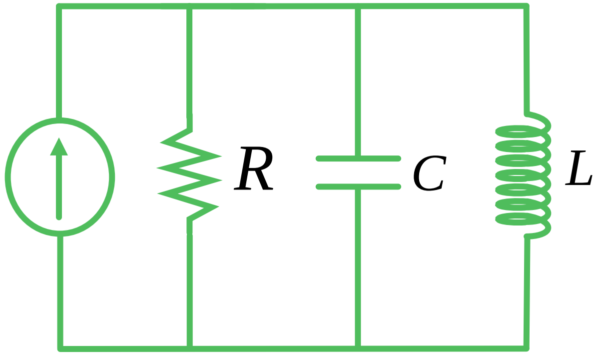
$$y(0)=y_0$$



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=b_1\frac{du(t)}{dt}+b_0u(t)$$

$$y(0)=y_0$$

$$\frac{dy(0)}{dt}=y_0'$$



המקרה הכללי:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$$

$$m < n$$

$$a_n = 1$$

n תנאי התחלה

$$\begin{cases} y^{(0)}(0) = y(0) = y_0 \\ y^{(1)}(0) = \dfrac{dy(0)}{dt} = y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = \dfrac{dy^{n-1}(0)}{dt^{n-1}} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

הערה: כאן ובשקופיות הבאות u הוא מקור כללי - לאו דווקא מדרגה

פתרון ה- ZIR

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = 0$$

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \qquad , \quad k = 0..n-1$$

נציב: $y(t) = Ae^{\lambda t}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k Ae^{\lambda t} = 0$$

פתרון ה- ZIR

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k A e^{\lambda t} = 0$$

$$A e^{\lambda t}\left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\right) = 0$$

$$\boxed{a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0}$$

כלומר, את הפתרונות מקבלים מהשורשים של **הפולינום האופייני**

סוגי פתרונות

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ \dots \ \lambda_{n-1},\lambda_n\}$$

$$e^{\lambda t} = e^{(\lambda_r + j\lambda_i)t} = e^{\lambda_r t}\left[\cos(\lambda_i t) + j\sin(\lambda_i t)\right]$$

$\lambda_i = 0$ פתרון ממשי

$\cancel{\lambda_r > 0}$ ~~פתרון מתבדר~~

$\lambda_r < 0$ פתרון מתכנס — **ריסון יתר**
ריסון קריטי

$\lambda_i \neq 0$ פתרון מרוכב

$\cancel{\lambda_r > 0}$ ~~פתרון מתבדר~~

$\lambda_r < 0$ פתרון מתכנס — **תת ריסון**

$\lambda_r = 0$ פתרון מתנדנד — **חסר הפסדים**

כל השורשים שונים זה מזה

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

שורשי **הפולינום האופייני:**

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ \ldots \ \lambda_{n-1}, \lambda_n\}$$

הבסיס למרחב הפתרונות:

$$\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t} \ \ldots \ e^{\lambda_{n-1} t}, e^{\lambda_n t}\}$$

הצבת תנאי התחלה:

$$y(t)=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_{n-1}e^{\lambda_{n-1}t}+c_ne^{\lambda_n t}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^2 & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{מטריצת ונדרמונדה}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ y_0^{(2)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

יש שורשים עם ריבוי (זהים)

$$\boxed{a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n=0}$$

שורשי **הפולינום האופייני:**

$$\left\{\underbrace{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\ \ldots\lambda_l}_{\text{שורשים שונים}},\underbrace{\lambda_{l+1}\ \ldots\ \lambda_{n-1},\lambda_n}_{\text{שורשים זהים}}\right\}$$

הבסיס למרחב הפתרונות:

$$\left\{e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t}\ldots,e^{\lambda_l t},e^{\lambda_{i+1}t},te^{\lambda_{l+2}t},t^2\,e^{\lambda_{i+3}t}\ldots,t^{n-l-1}e^{\lambda_n t}\right\}$$

דוגמא

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=0$$

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=3$$

$$\lambda^2+7\lambda+12=0$$

$$\lambda_1=-3$$
$$\lambda_2=-4$$

דוגמא

$$\lambda_1 = -3$$
$$\lambda_2 = -4$$

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-4t}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 7$$
$$c_2 = -6$$

$$y(t) = 7e^{-3t} - 6e^{-4t}$$

דוגמא

$$y'''(t)+5y''(t)+8y'(t)+4y(t)=0$$

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=3$$
$$y''(0)=3$$

$$\lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4=0$$

$$\lambda_1=-1$$
$$\lambda_{2,3}=-2$$

דוגמא

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_{2,3} = -2$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 19$$
$$c_2 = -18$$
$$c_3 = -14$$

$$y(t) = 19e^{-t} - 18e^{-2t} - 14te^{-2t}$$

פתרון ה- ZSR

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$$

$$y^{(k)}(t) = 0, \qquad k = 0 \,..\, n-1$$

נסתכל על התגובה להלם

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$$

$$y^{(k)}(t) = 0, \qquad k = 0 \,..\, n-1$$

$$u(t) \Rightarrow \delta(t)$$

ההלם מעדכן את תנאי ההתחלה.
התגובה להלם היא למעשה תגובת **ZIR**
עם תנאי התחלה מעודכנים.

אבל כיצד נמצא את תנאי ההתחלה המעודכנים?

דוגמא:

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=\delta(t)$$

$$y^{(k)}(0)=0\ ,\quad k=0,1,2$$

אנחנו יודעים את צורת הפתרון מרגע $t=0^{+}$

אנחנו יודעים גם שעד $t\le 0^{-}$ הפתרון הוא $y(t)=0$

$$y(t)=\underbrace{\left(c_1e^{-3t}+c_2e^{-4t}\right)}_{y_H(t)}u(t)$$

נציב במשוואה

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=\delta(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\left(c_1e^{-3t}+c_2e^{-4t}\right)}_{y_H(t)}u(t)$$

$$y=y_Hu$$

$$y'=y'_Hu+y_H\delta=y'_Hu+y_H(0)\delta$$

$$y''=y''_Hu+y'_H(0)\delta+y_H(0)\delta'$$

נציב במשוואה

$$y''(t)+7y'(t)+12y(t)=\delta(t)$$

$$\left(y_H''+7y_H'+12y_H\right)u+$$
$$+\left[y_H'(0)+7y_H(0)\right]\delta+y_H(0)\delta'=\delta$$

$$y_H'(0)+7y_H(0)=1$$
$$y_H(0)=0$$

נציב במשוואה

$$y_H'(0)+7y_H(0)=1$$

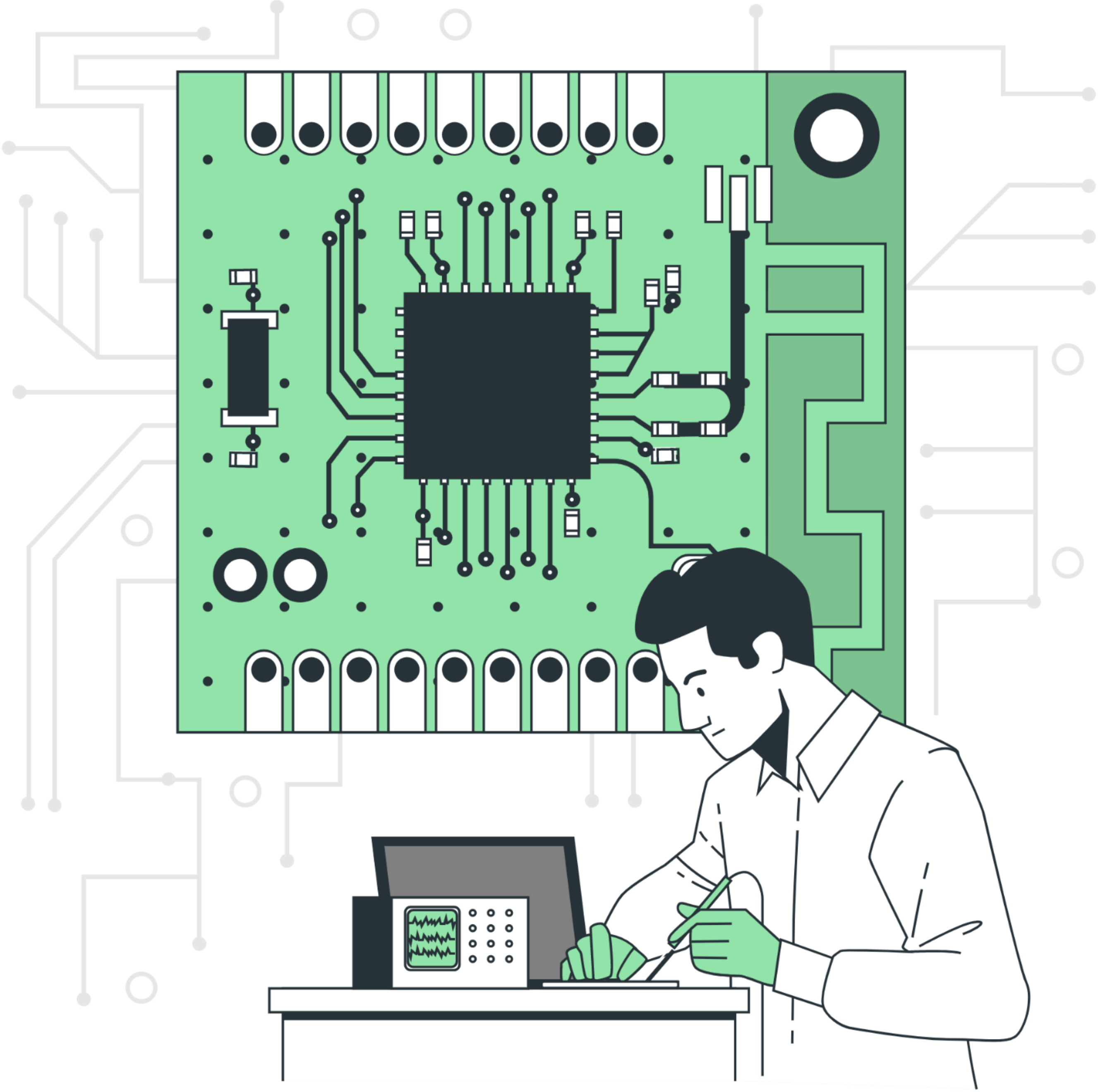
$$y_H(0)=0$$

$$y_H(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-4t}$$

$$c_1+c_2=0 \qquad c_1=1$$

$$-3c_1-4c_2=1 \qquad c_2=-1$$

$$y(t)=\left(e^{-3t}-e^{-4t}\right)u(t)$$



מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.8 : אינטגרל הקונבולוציה

נתחיל מהסוף:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t) = ?$$

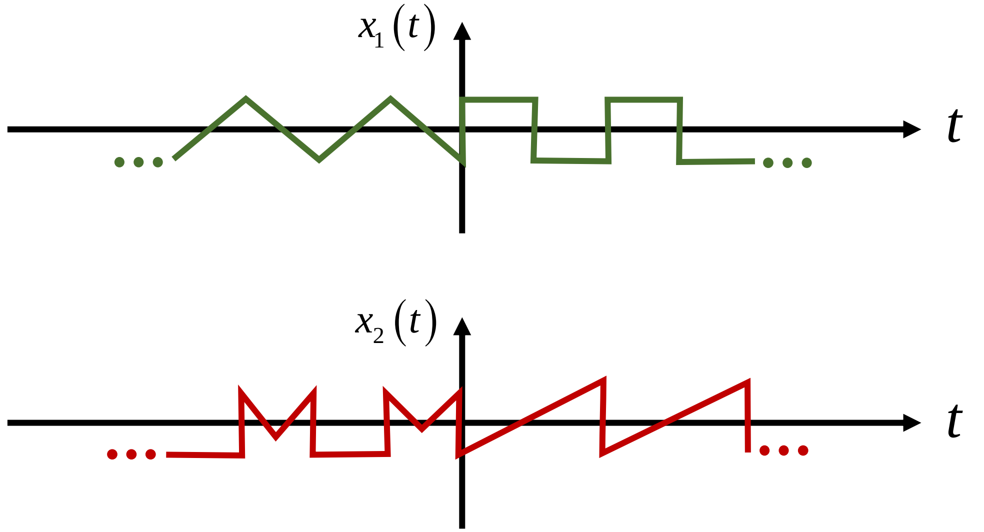
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

קונבולוציה

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

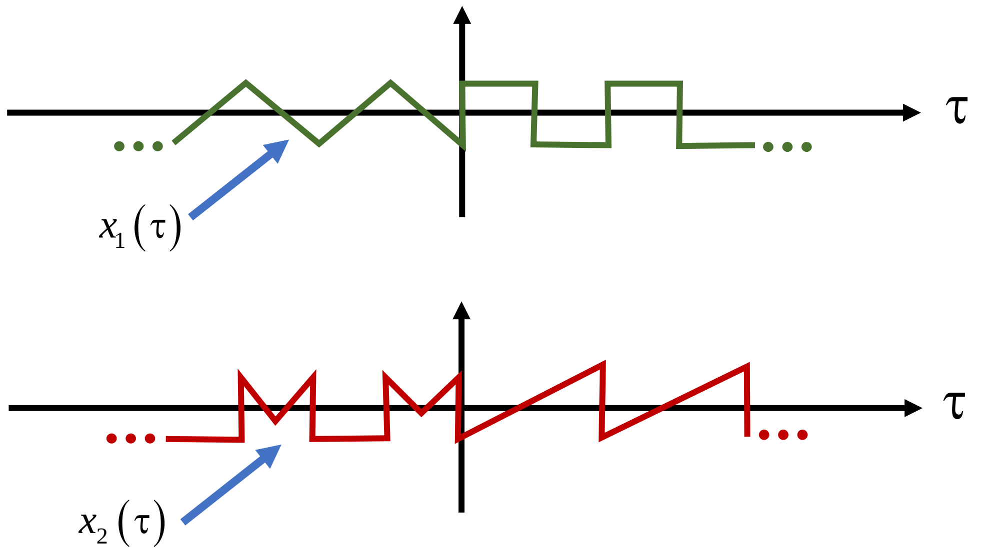
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$



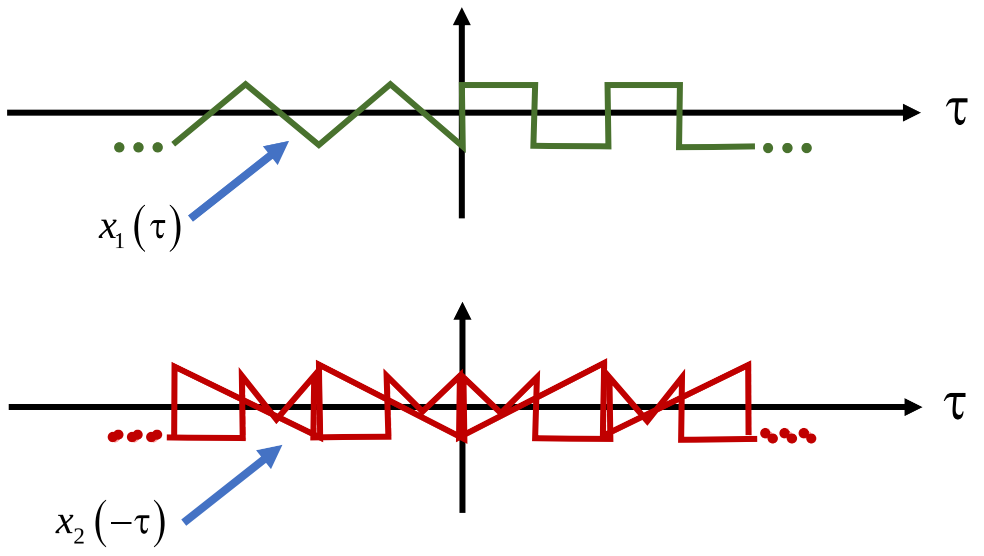
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$



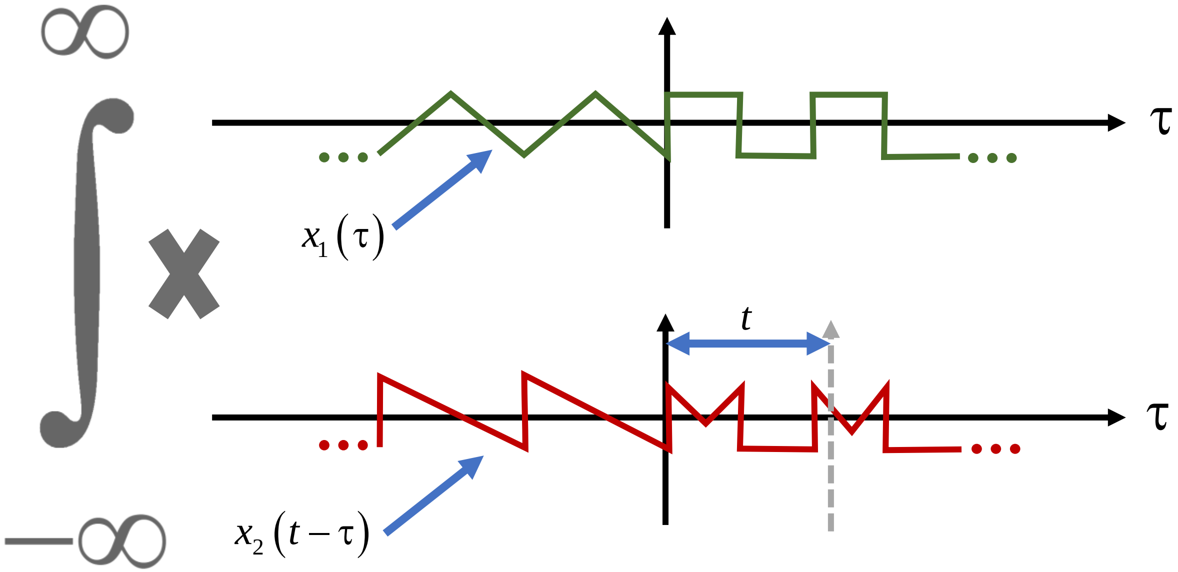
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$



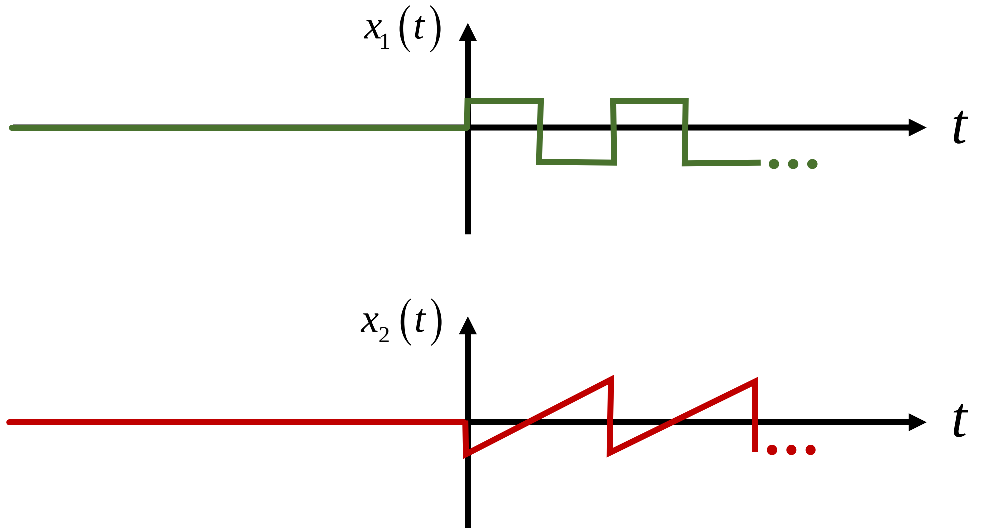
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$



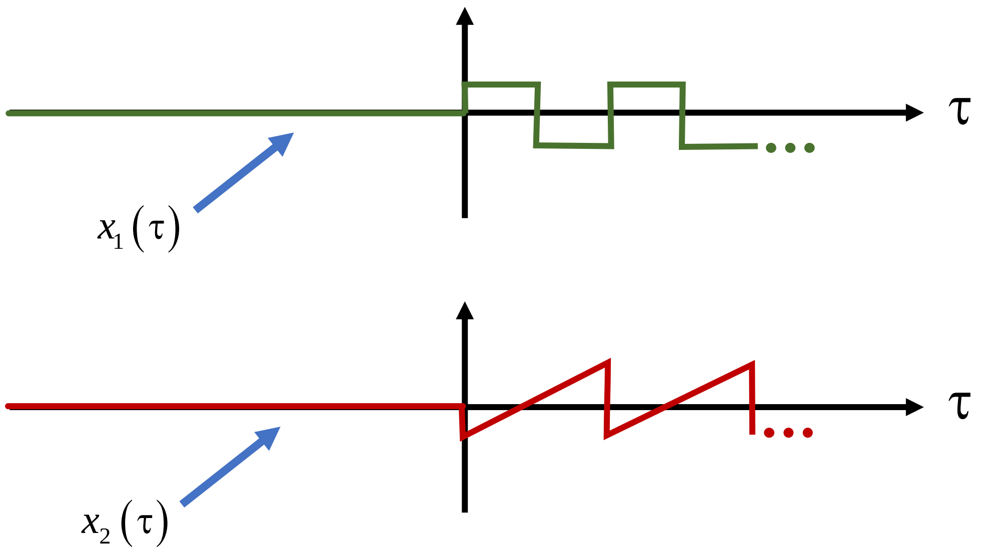
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$



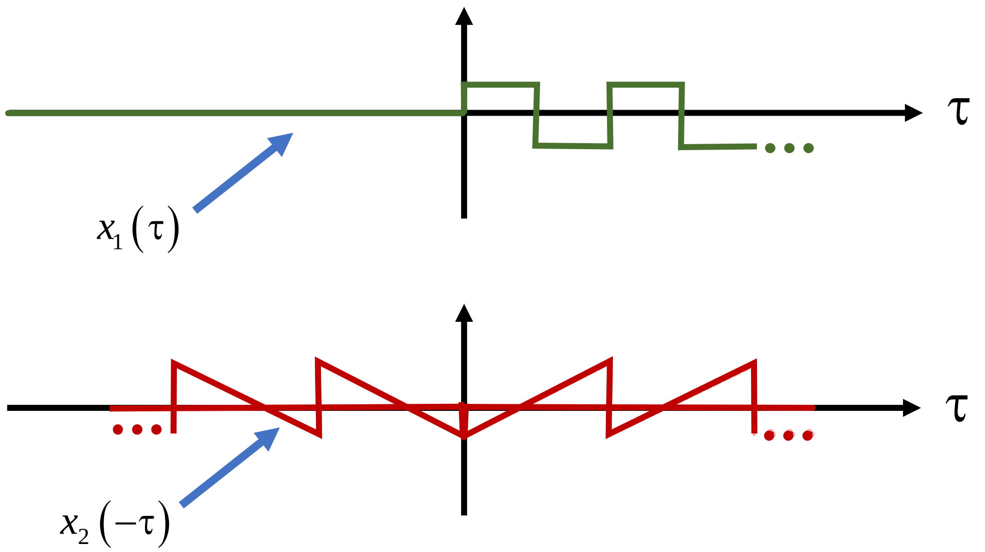
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$



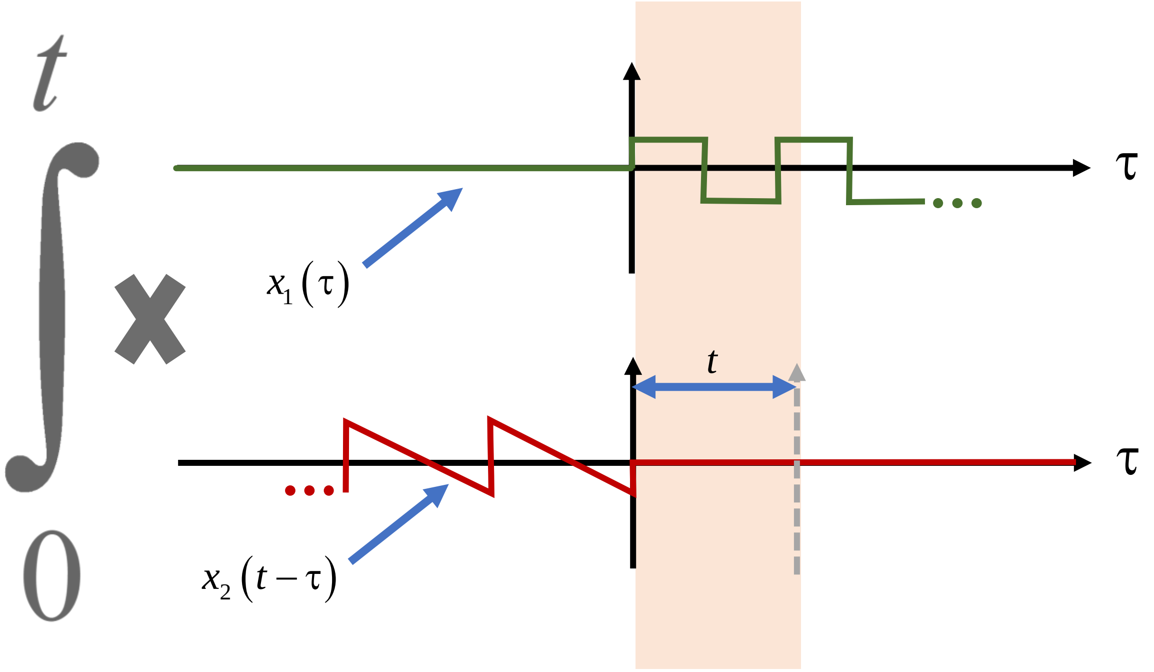
תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

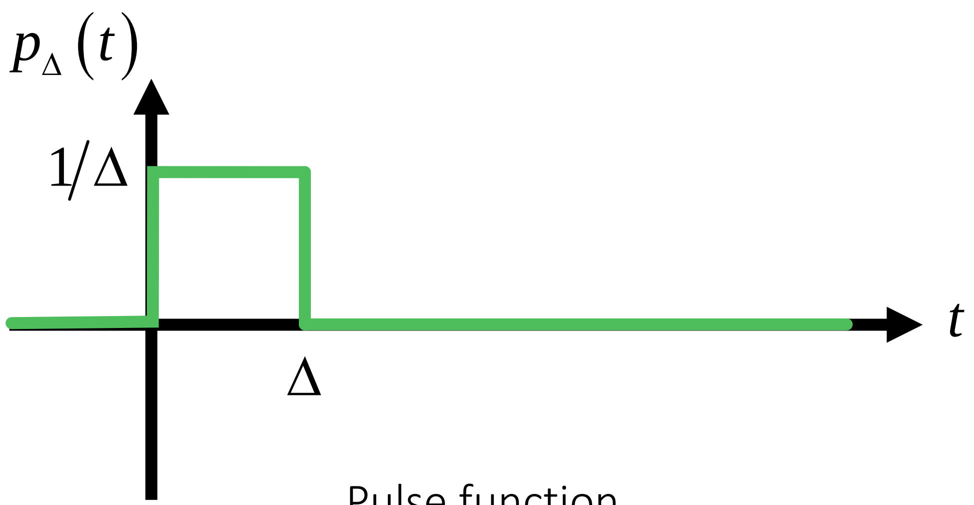


תיאור גרפי של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$



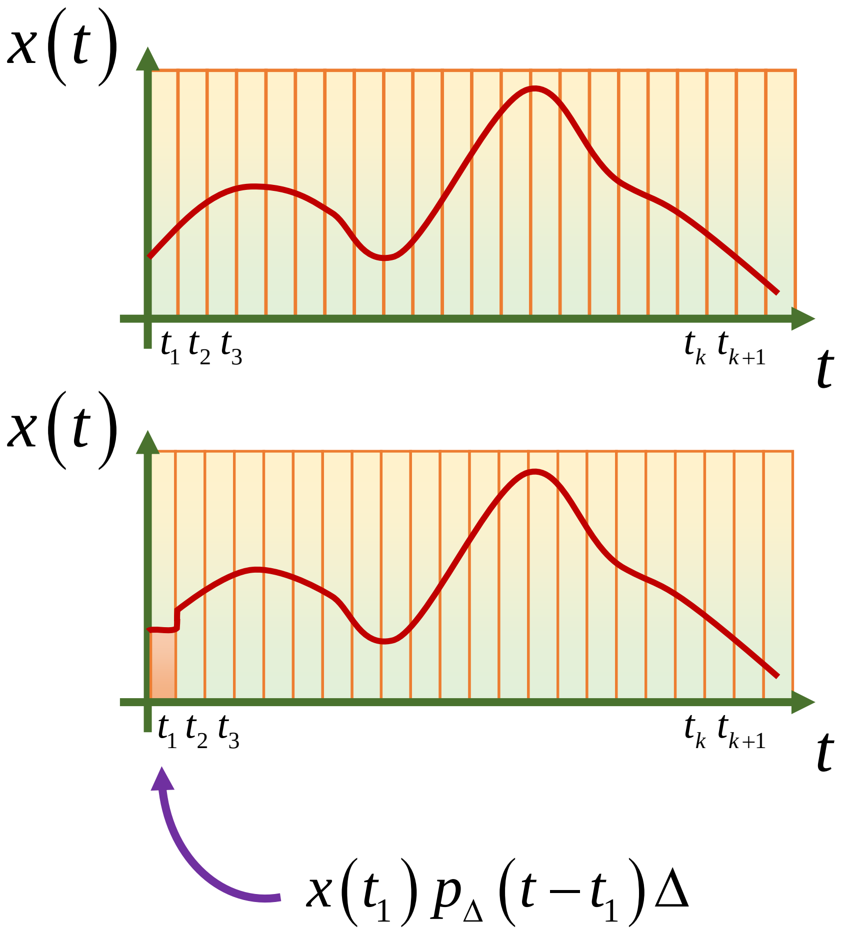
פונקציית פולס (מרובע)



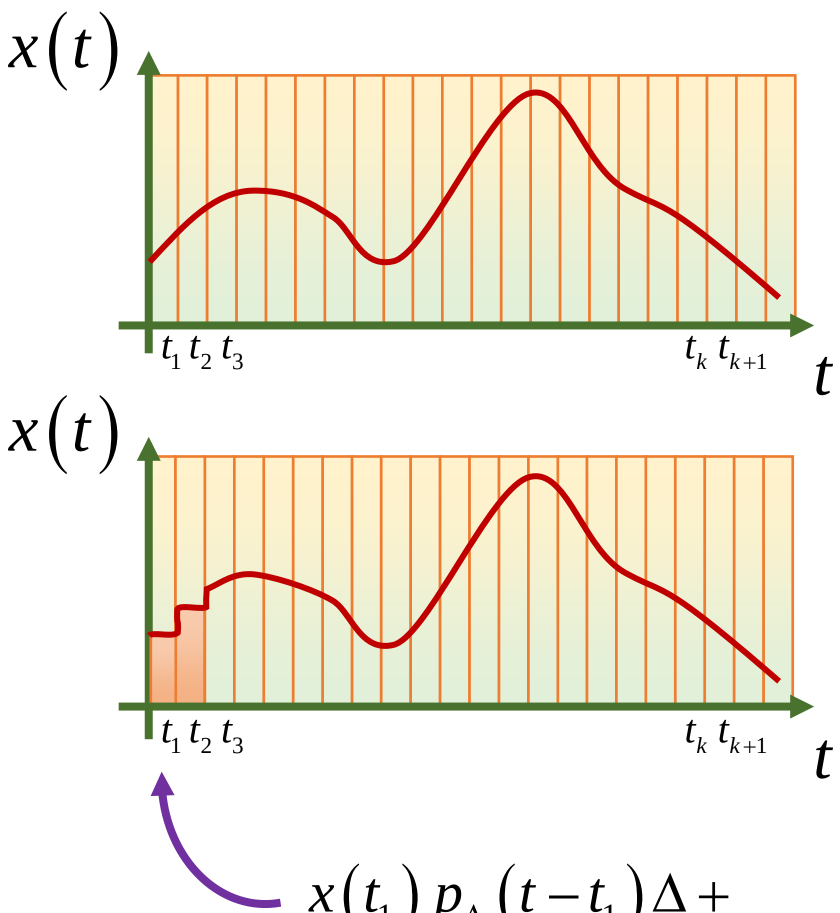
Pulse function

$$p_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \Delta < t \end{cases}$$

הסבר:

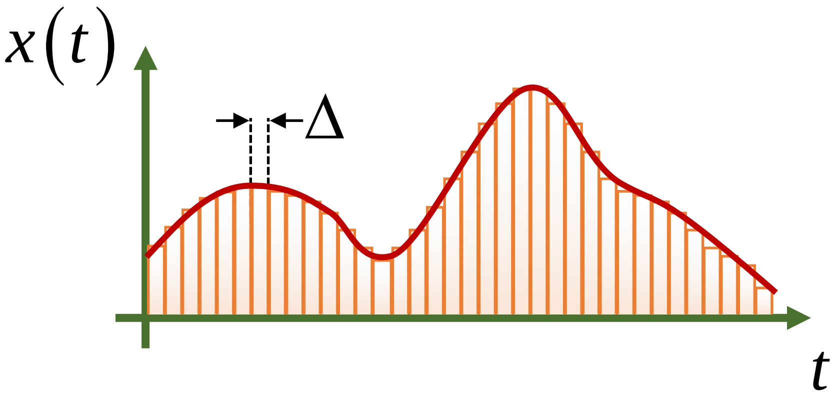


הסבר:



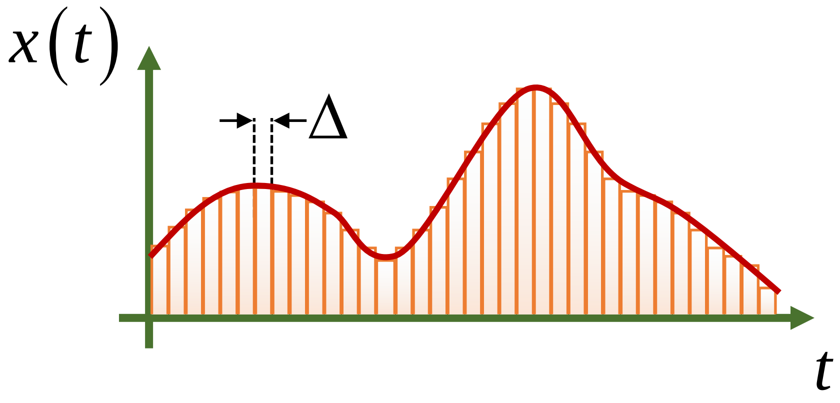
$$x(t_1)\,p_\Delta(t-t_1)\Delta+$$
$$x(t_2)\,p_\Delta(t-t_2)\Delta$$

הסבר:



$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k)\, p_\Delta(t-t_k)\,\Delta$$

הסבר:



$$x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k)\, p_\Delta(t-t_k)\,\Delta$$

$$\Delta \to 0$$

$$x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

נחזור למערכת שלנו

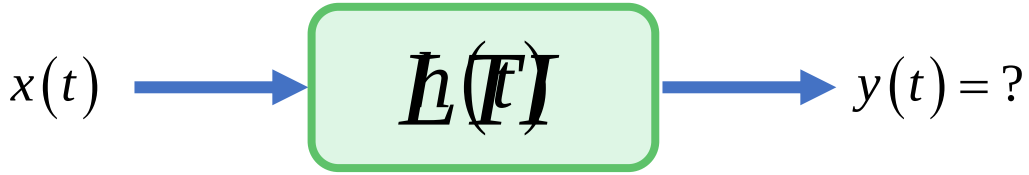
$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k)\, p_\Delta(t-t_k)\Delta \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k)\, h_\Delta(t-t_k)\Delta$$

$$\Big\downarrow \; \Delta \to 0$$

$$\underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau}_{x(t)} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau}_{y(t)}$$

חשיבות התגובה להלם



$$y(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

במערכת **LTI**, אם אנחנו יודעים את התגובה להלם שלה (**Impulse Response**) אנחנו יכולים למצוא את התגובה שלה לכל אות כניסה אחר.
המשמעות היא שניתן לייצג את המערכת בעזרת התגובה להלם שלה.

תכונות של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

1. קומוטטיביות (חילופיות)

$$x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$$

$$x(t)\rightarrow\boxed{h(t)}\rightarrow y(t)=x(t)*h(t)$$

$$\parallel$$

$$h(t)\rightarrow\boxed{x(t)}\rightarrow y(t)=h(t)*x(t)$$

תכונות של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

2. **אסוציטיביות (קיבוציות)**

$$\left[x_1(t)*x_2(t)\right]*x_3(t)=x_1(t)*\left[x_2(t)*x_3(t)\right]$$

$$x(t)\rightarrow\boxed{h_1(t)}\rightarrow\boxed{h_2(t)}\rightarrow y(t)=\left[x(t)*h_1(t)\right]*h_2(t)$$

$$\|$$

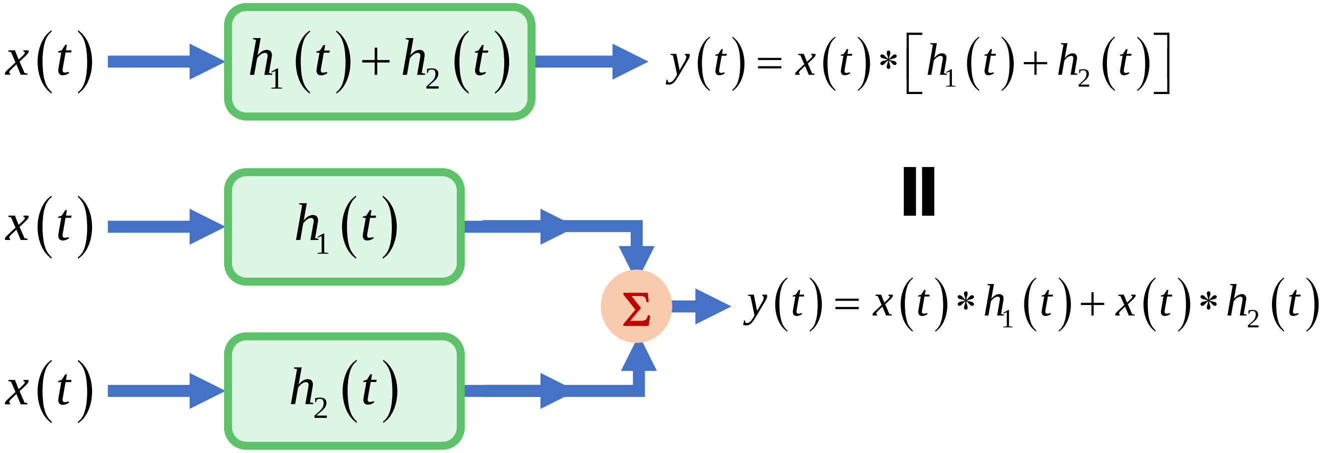
$$x(t)\rightarrow\boxed{h_1(t)*h_2(t)}\rightarrow y(t)=x(t)*\left[h_1(t)*h_2(t)\right]$$

תכונות של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

3. דיסטריביוטיביות (פילוג)

$$x_1(t)*\left[x_2(t)+x_3(t)\right]=x_1(t)*x_2(t)+x_1(t)*x_3(t)$$



תכונות של פעולת הקונבולוציה

$$y(t)=x_1(t)*x_2(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

4. קונבולוציה עם הלם

$$x(t)*\delta(t)=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(t)$$

תכונות של פעולת הקונבולוציה

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

4. קונבולוציה של אותות מוכפלים ב- u(t)

$$\left[x_1(t)u(t)\right] * \left[x_2(t)u(t)\right] = \int_{\tau=0}^{t} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

דוגמא:

נתונה מערכת LTI שתגובת ההלם שלה: $h(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

מצא את התגובה שלה למדרגה: $x(t)=u(t)$

$$s(t)=u(t)*\left[e^{-\alpha t}u(t)\right]=\int_{\tau=-\infty}^{\infty}u(\tau)e^{-\alpha t}u(t-\tau)d\tau$$

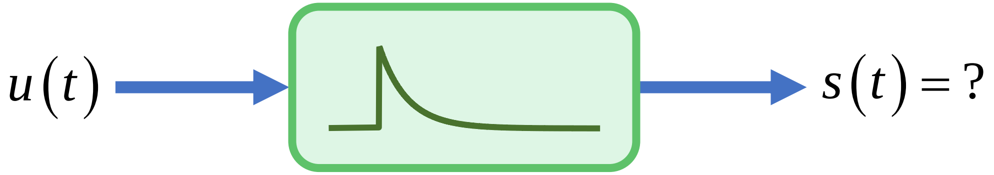
$$s(t)=\int_{\tau=0}^{t}e^{-\alpha t}d\tau=\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha\tau}\Big|_{0}^{t}$$

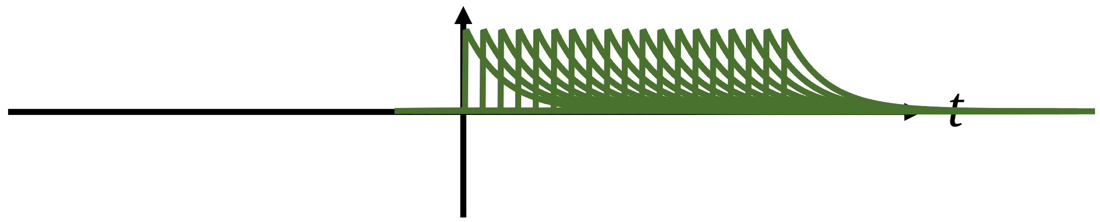
$$s(t)=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)u(t)$$

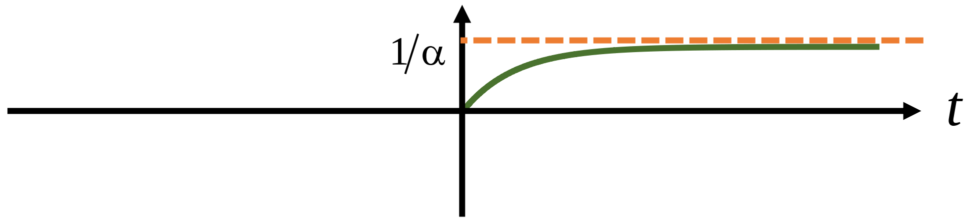
דוגמא:

נתונה מערכת LTI שתגובת ההלם שלה: $h(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

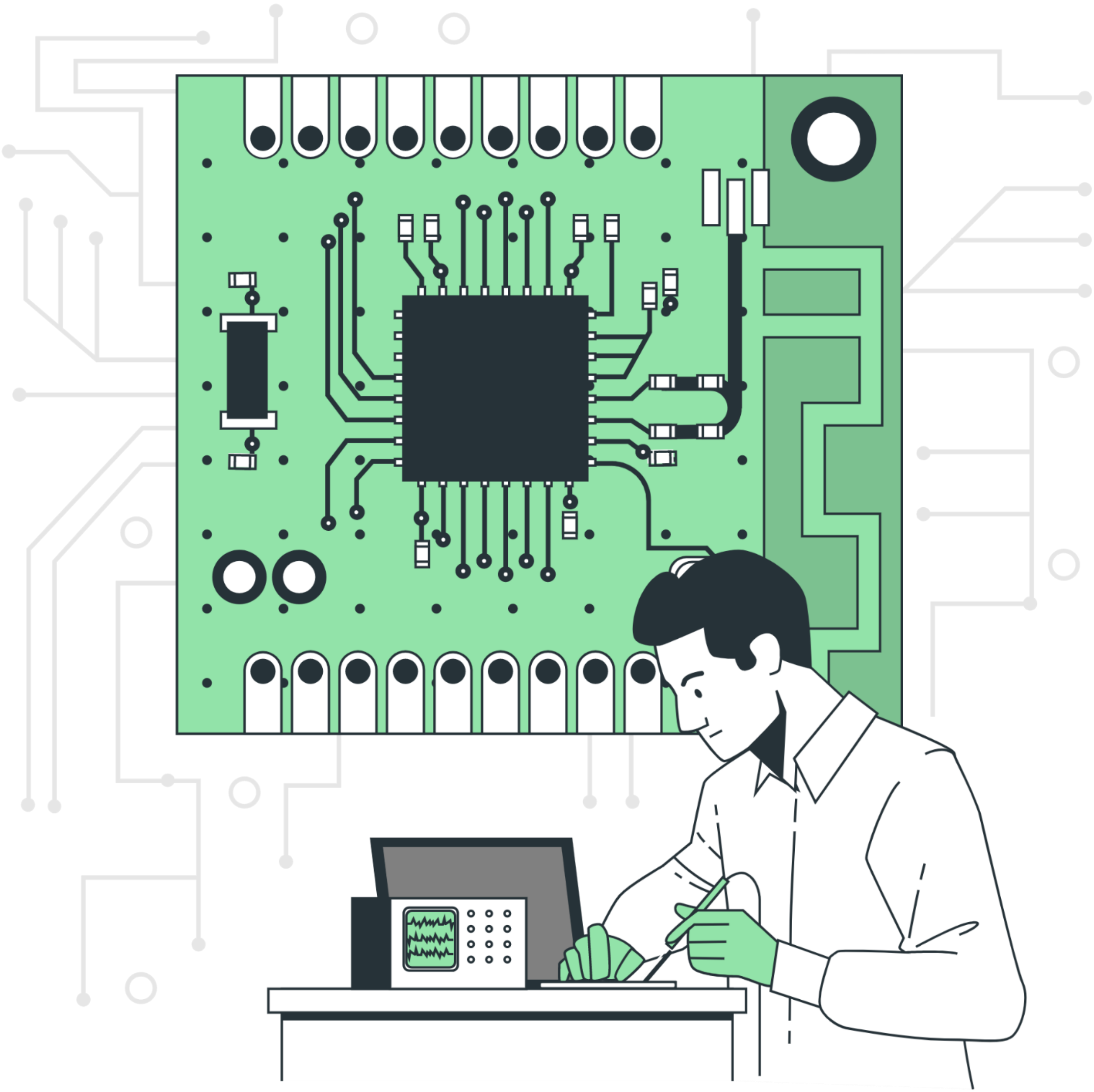
מצא את התגובה שלה למדרגה: $x(t)=u(t)$







VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 4 : מערכות – כללי

מקטע 4.9 : אינטגרל הקונבולוציה – חלק שני

דוגמא:

נתונה מערכת LTI שתגובת ההלם שלה: $h(t)=\delta(t-2)+2\delta(t-4)$

מצא את התגובה שלה לכניסה: $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

$$y(t)=\left[e^{-\alpha t}u(t)\right]*\left[\delta(t-2)+2\delta(t-4)\right]=$$

$$=\int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)\delta(\underbrace{t-\tau-2}_{})d\tau+ \qquad \begin{aligned} t-\tau-2&=0\\ \tau&=t-2\end{aligned}$$

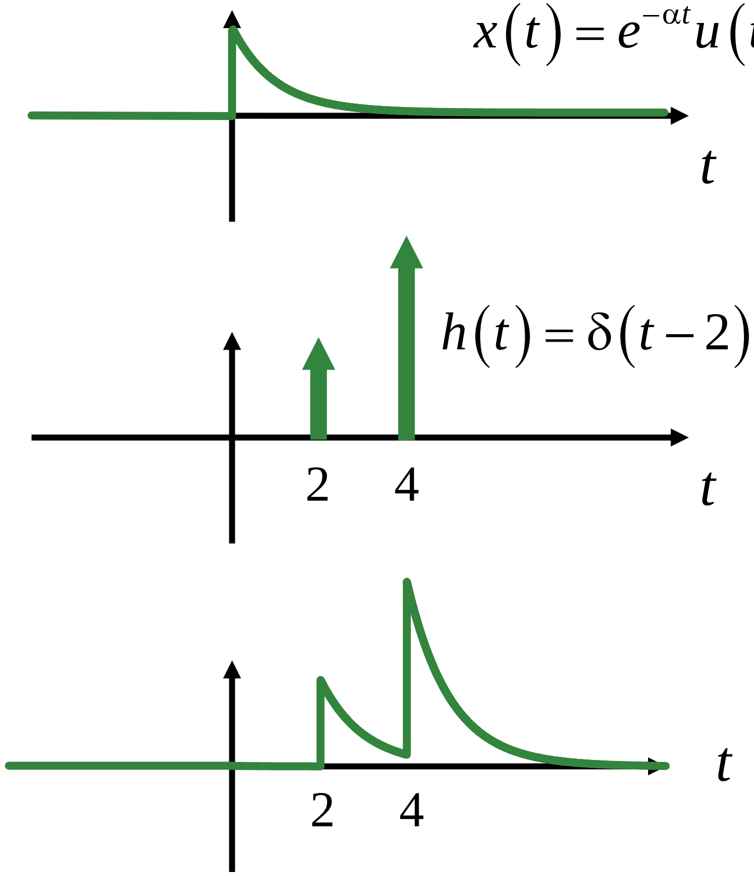
$$+2\int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}u(\tau)\delta(\underbrace{t-\tau-4}_{})d\tau \qquad \begin{aligned} t-\tau-4&=0\\ \tau&=t-4\end{aligned}$$

$$y(t)=e^{-\alpha(t-2)}u(t-2)+2e^{-\alpha(t-4)}u(t-4)$$

דוגמא:

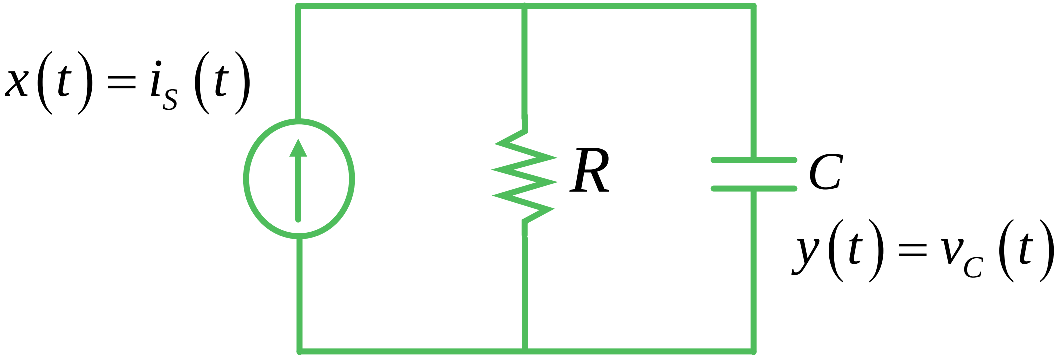
$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

$$h(t) = \delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$



דוגמא עם מעגל חשמלי:

מצא את תגובת המעגל הבא ל- $i_S(t) = tu(t)$



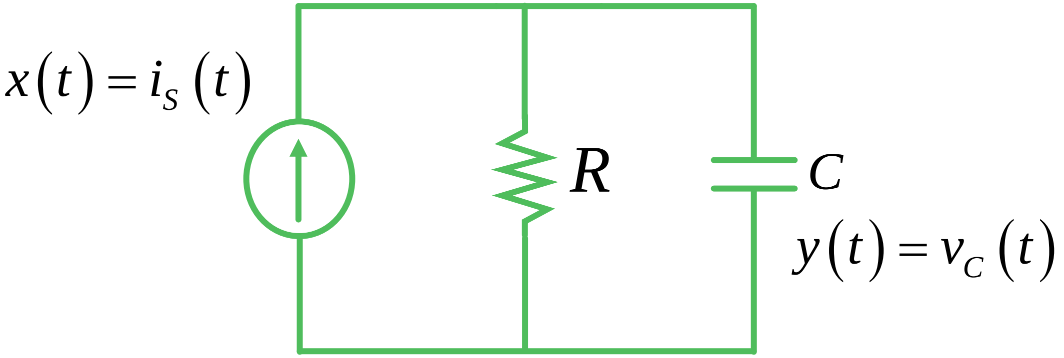
שיטת הפתרון:
ננתח את המעגל שלפנינו כמערכת שהכניסה שלה זה זרם המקור והמוצא שלה מתח הקבל.

1. נמצא את תגובת ההלם של המערכת
2. נעשה קונבולוציה של תגובת ההלם עם אות הכניסה

דוגמא עם מעגל חשמלי:

מצא את תגובת המעגל הבא ל-

$$i_S(t) = tu(t)$$



KCL:

$$i_R(t) + i_C(t) = i_S(t)$$

KVL:

$$v_R(t) = v_C(t)$$

$$\frac{v_R(t)}{R} + C\frac{dv_C(t)}{dt} = i_S(t) \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{C}i_S(t)$$

דוגמא עם מעגל חשמלי:

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=\frac{1}{C}i_S(t)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=\frac{1}{C}\delta(t)$$

אנחנו זוכרים שאת התגובה להלם אפשר למצוא בעזרת
"עדכון תנאי התחלה"

נעשה אינטגרל מ- $t=0^-$ עד $t=0^+$ על שני הצדדים

$$\left[v_C(0^+)-v_C(0^-)\right]+\frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+}v_C(t')dt'=\frac{1}{C}$$

דוגמא עם מעגל חשמלי:

$$\left[v_C\left(0^+\right)-v_C\left(0^-\right)\right]+\frac{1}{RC}\int_{0^-}^{0^+} v_C\left(t'\right)dt'=\frac{1}{C}$$

$$v_C\left(0^+\right)=\frac{1}{C}$$

$$\frac{dv_C\left(t\right)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C\left(t\right)=0$$

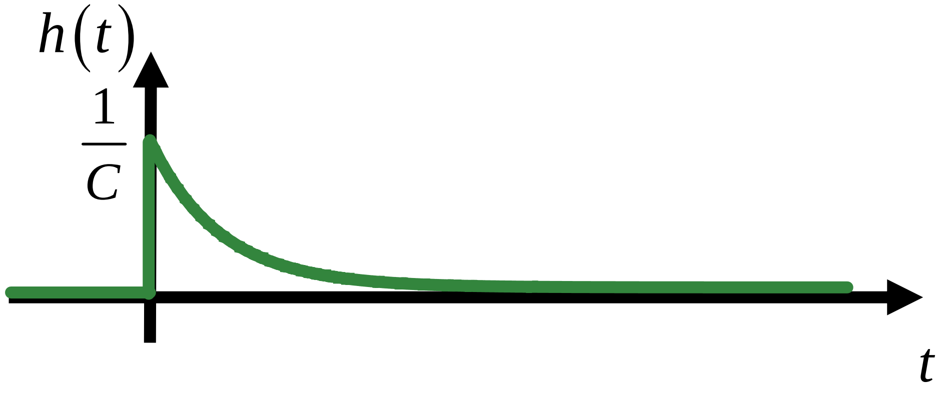
$$v_C\left(0^+\right)=\frac{1}{C}$$

תגובת ההלם:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C(t) = 0$$

$$v_C(0^+) = \frac{1}{C} \quad , \quad \tau = RC$$

$$h(t) = v_C(t) = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$



התגובה לאות הכניסה:

$$i_S(t) = tu(t)$$

$$y(t) = \left[tu(t)\right] * \left[\frac{1}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)\right]$$

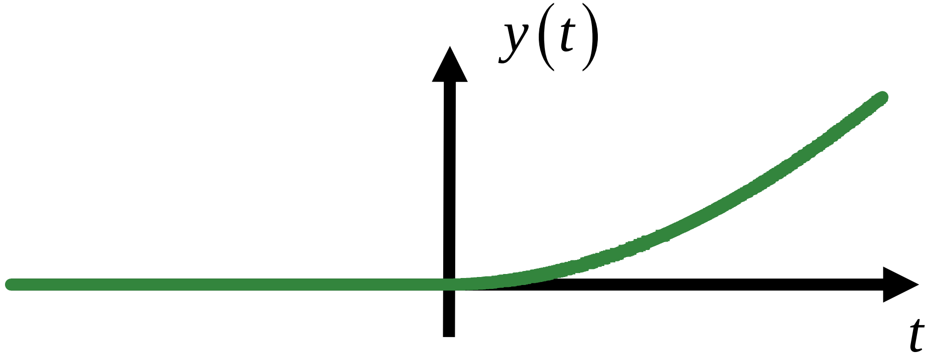
$$y(t) = \frac{1}{C}\int_0^t t' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} dt' =$$

$$= \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{C}\int_0^t t' e^{\frac{t'}{\tau}} dt'$$

התגובה לאות הכניסה:

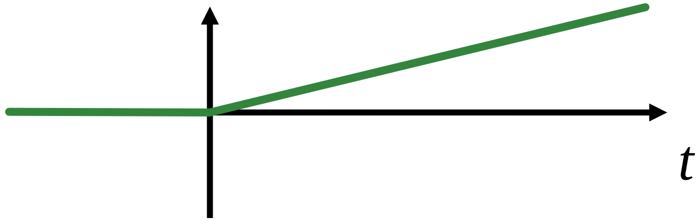
$$y(t)=\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{C}\left[\tau t' e^{\frac{t'}{\tau}}-\tau^2 e^{\frac{t'}{\tau}}\right]_0^t$$

$$y(t)=\left[\underbrace{\frac{\tau^2}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{תופעת מעבר}}+\underbrace{\frac{\tau}{C}(t-\tau)}_{\text{מצב מתמיד}}\right]u(t)$$

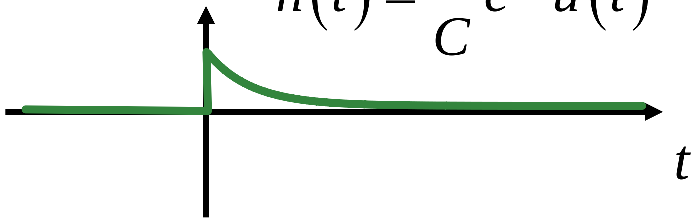


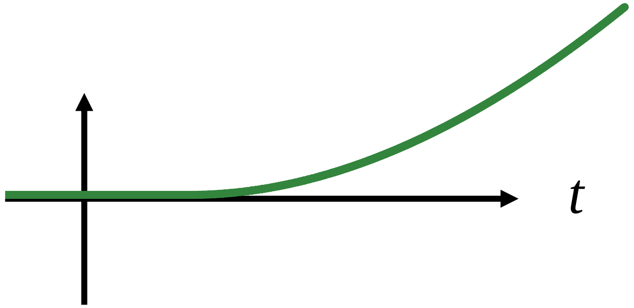
דוגמא:

$$x(t) = tu(t)$$



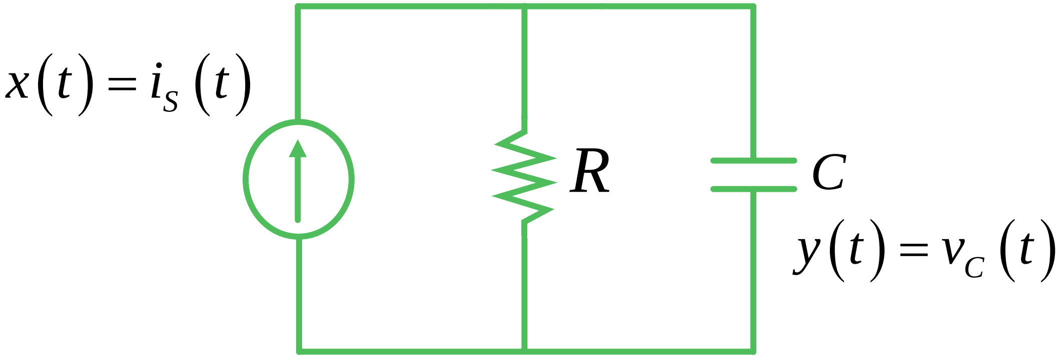
$$h(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$





דוגמא נוספת עם מעגל חשמלי:

מצא את תגובת המעגל הבא ל- $i_S(t)=\sin(\omega t)u(t)$



שיטת הפתרון:

1. נמצא את תגובת ההלם של המערכת
2. נעשה קונבולוציה של תגובת ההלם עם אות הכניסה

דוגמא נוספת עם מעגל חשמלי:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$i_S(t)=\sin(\omega t)u(t)$$

$$y(t)=\left[\sin(\omega t)u(t)\right]*\left[\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_0^t \sin(\omega t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'=\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{C}\int_0^t \sin(\omega t')e^{\frac{t'}{\tau}}dt'$$

דוגמא נוספת עם מעגל חשמלי:

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_0^t \sin(\omega t')e^{-\frac{t-t'}{\tau}}dt'=\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{C}\int_0^t \sin(\omega t')e^{\frac{t'}{\tau}}dt'$$

$$y(t)=\frac{\tau}{1+(\omega\tau)^2}\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{C}\left[-e^{\frac{t'}{\tau}}\omega\tau\cos(\omega t')+e^{\frac{t'}{\tau}}\sin(\omega t')\right]_0^t$$

$$y(t)=\frac{\tau}{1+(\omega\tau)^2}\frac{1}{C}\left[-\omega\tau\cos(\omega t)+\sin(\omega t)+\omega\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$