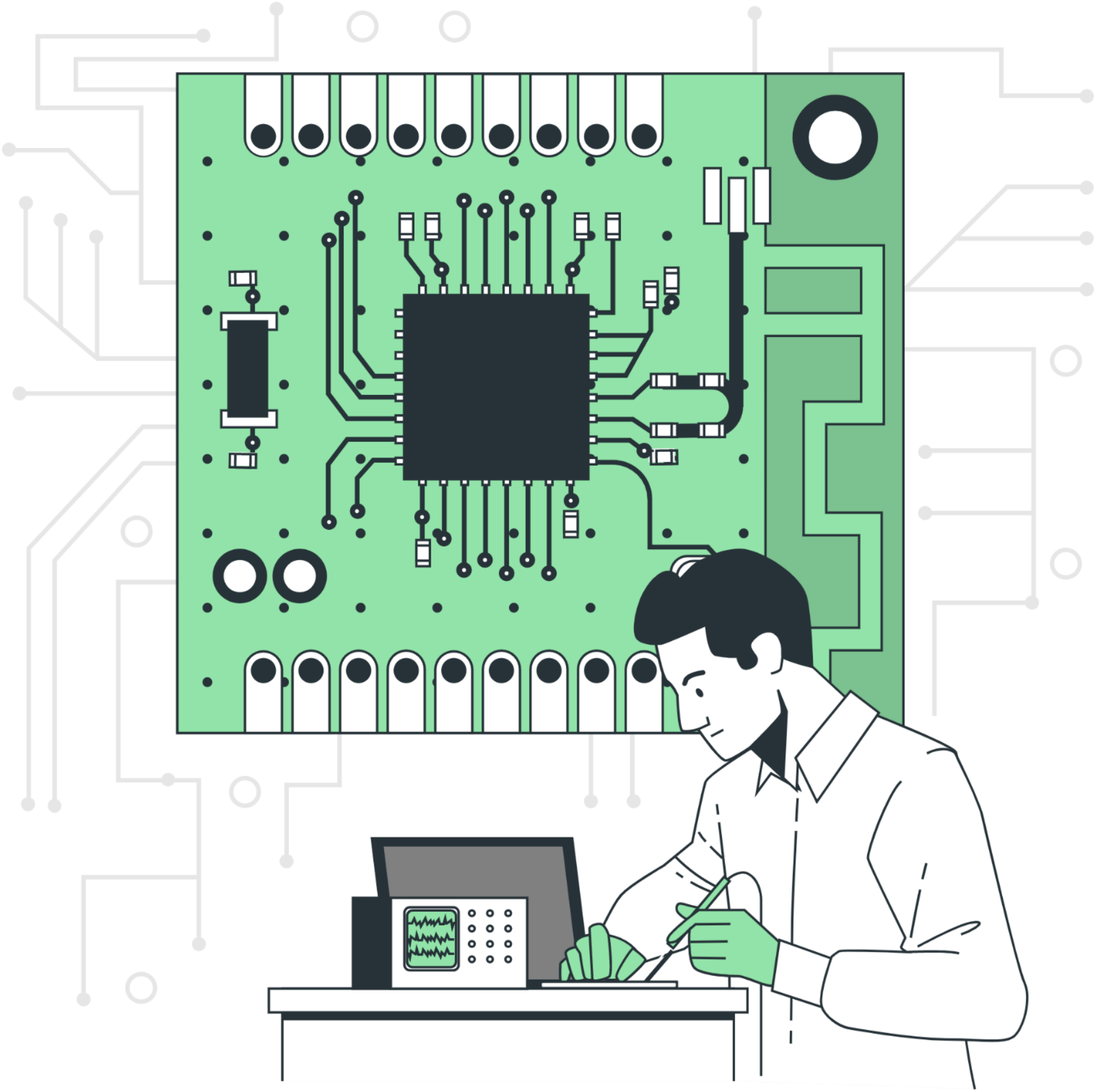
VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



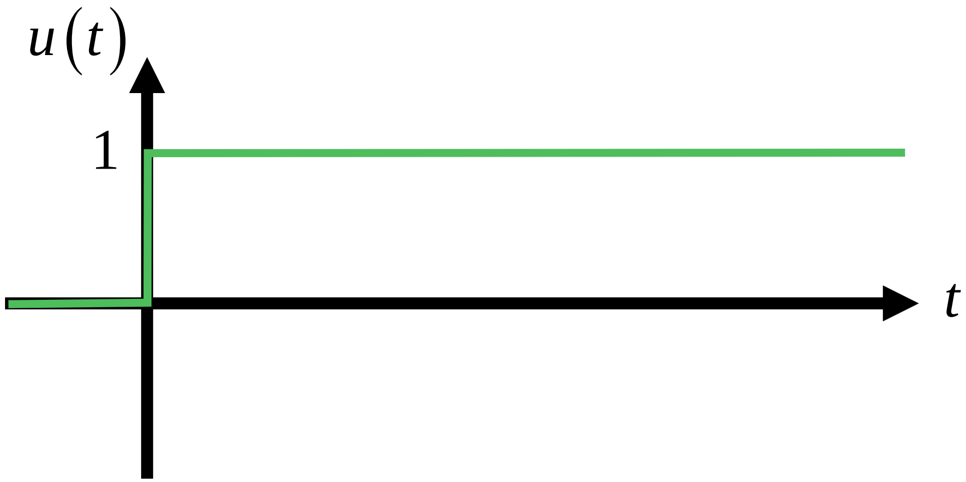
מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 3 : מעגלים – תופעות מעבר

מקטע 3.1 : פונקציות סינגולריות

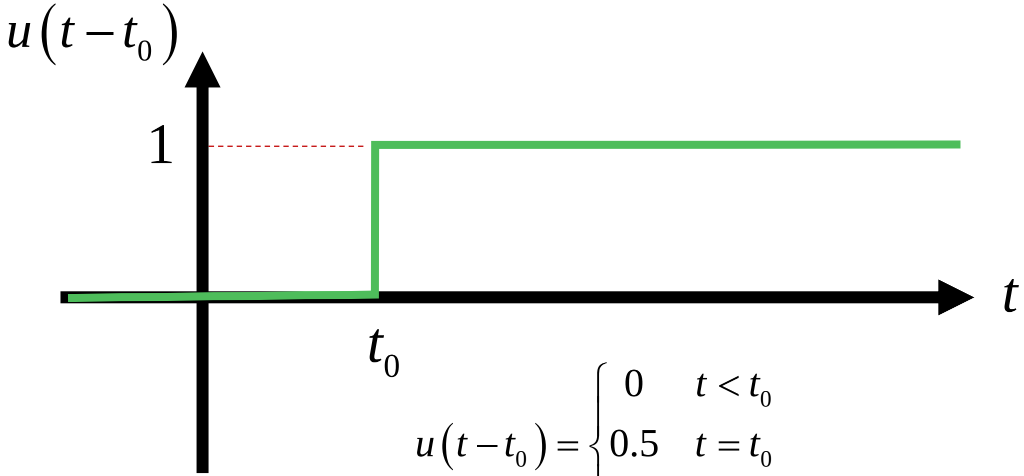
$u(t)$ – פונקציית מדרגה



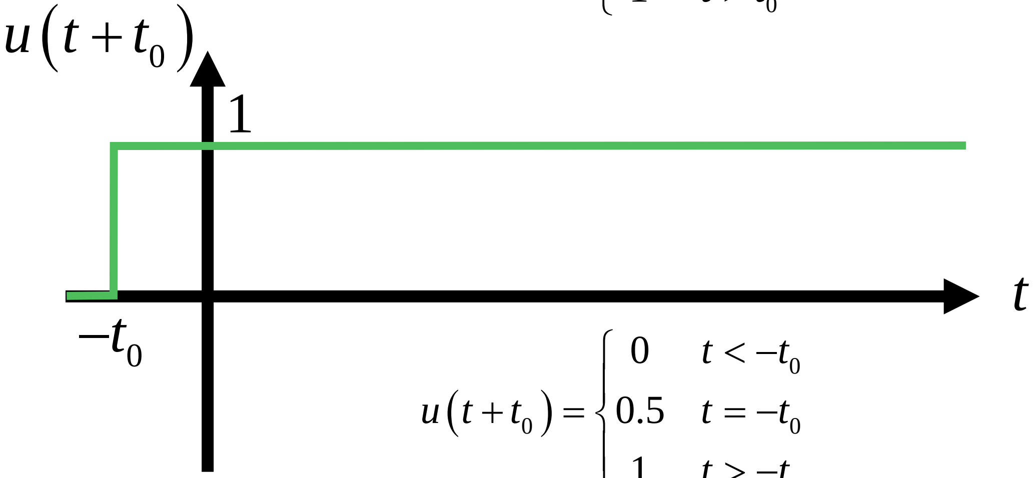
Unit step function

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.5 & t=0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

הזזה או השהייה



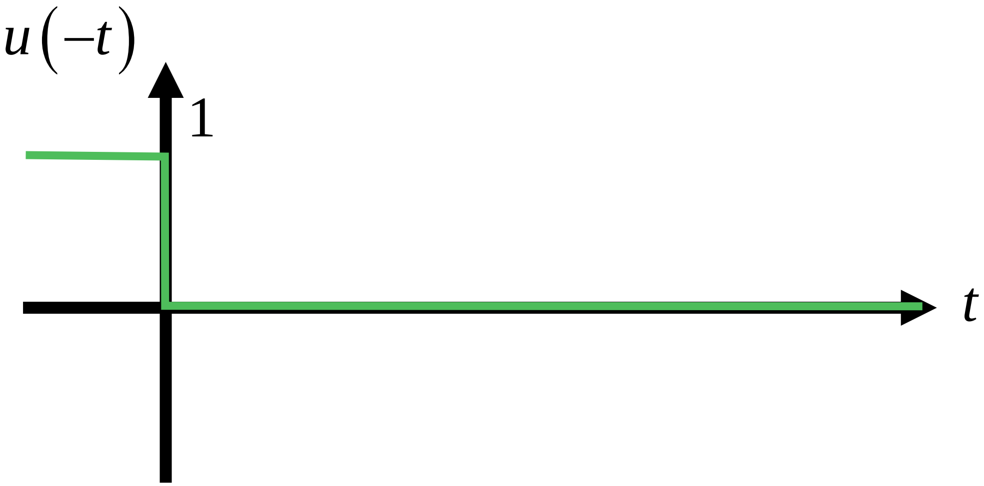
$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 0.5 & t=t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$



$$u(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0\\ 0.5 & t=-t_0\\ 1 & t>-t_0\end{cases}$$

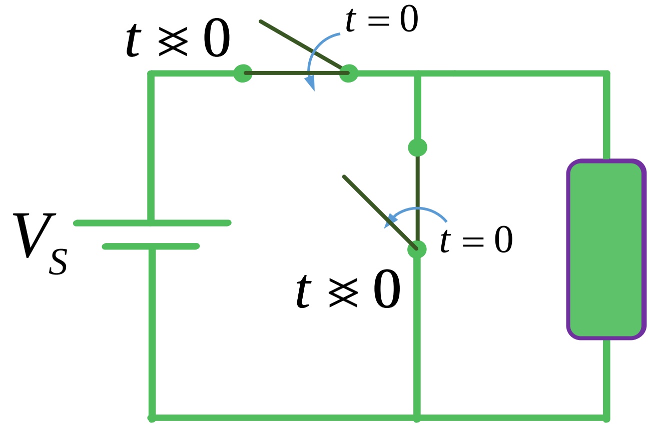
VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

היפוך



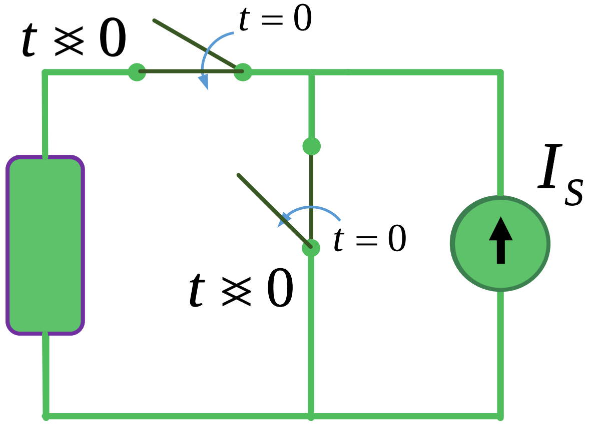
$$u(-t)=\begin{cases}0 & t>0\\ 0.5 & t=0\\ 1 & t<0\end{cases}$$

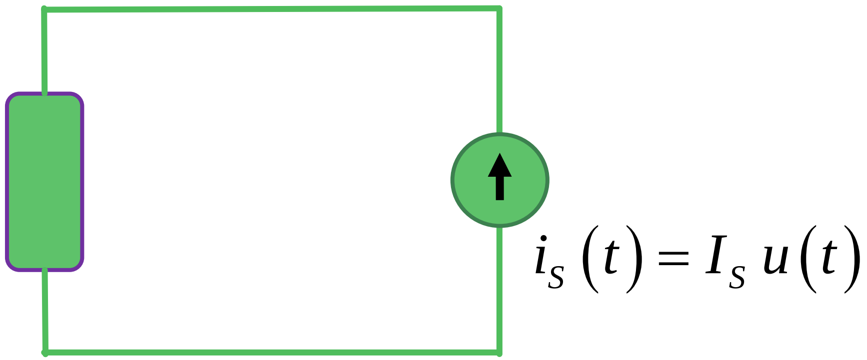
תיאור פעולת מתגים



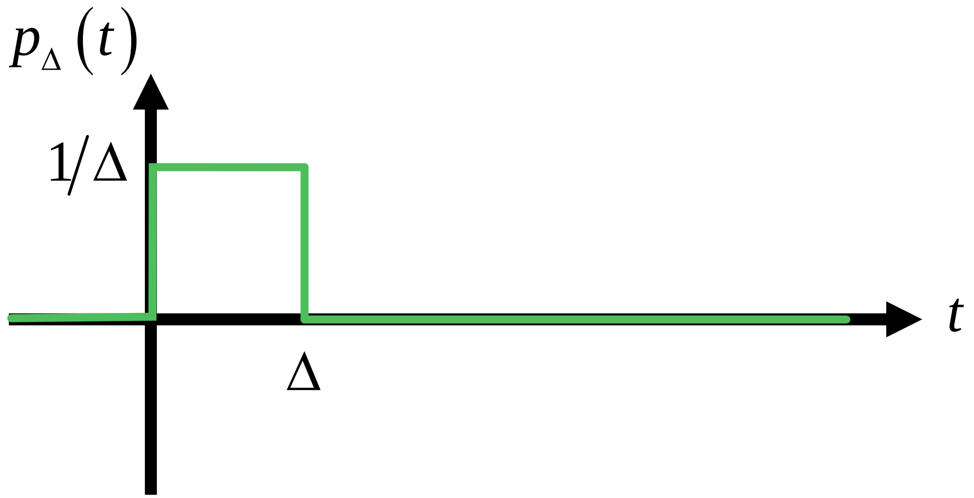
$$v_S(t) = V_S\,u(t)$$

תיאור פעולת מתגים





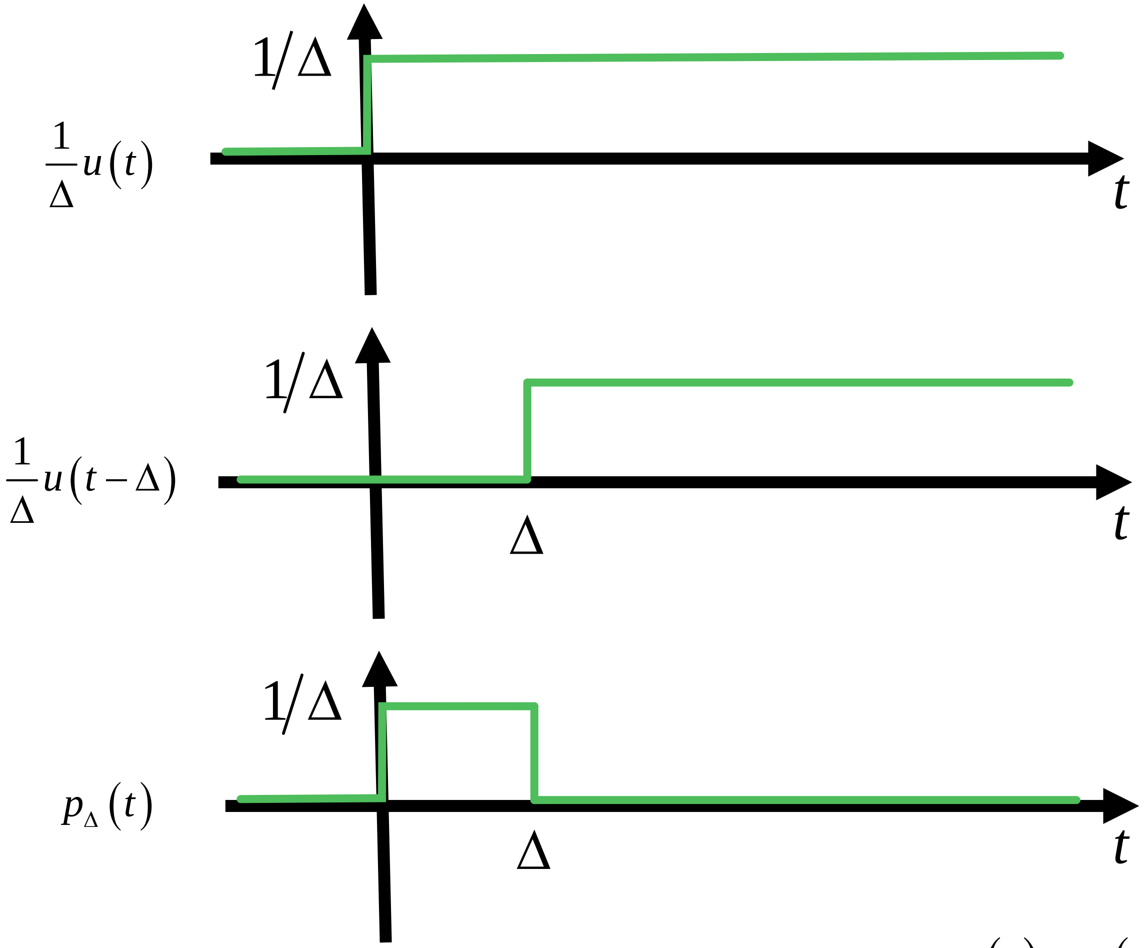
פונקציית פולס (מרובע)



Pulse function

$$p_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & \Delta < t \end{cases}$$

הקשר בין פולס למדרגה



$$p_\Delta(t)=\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$

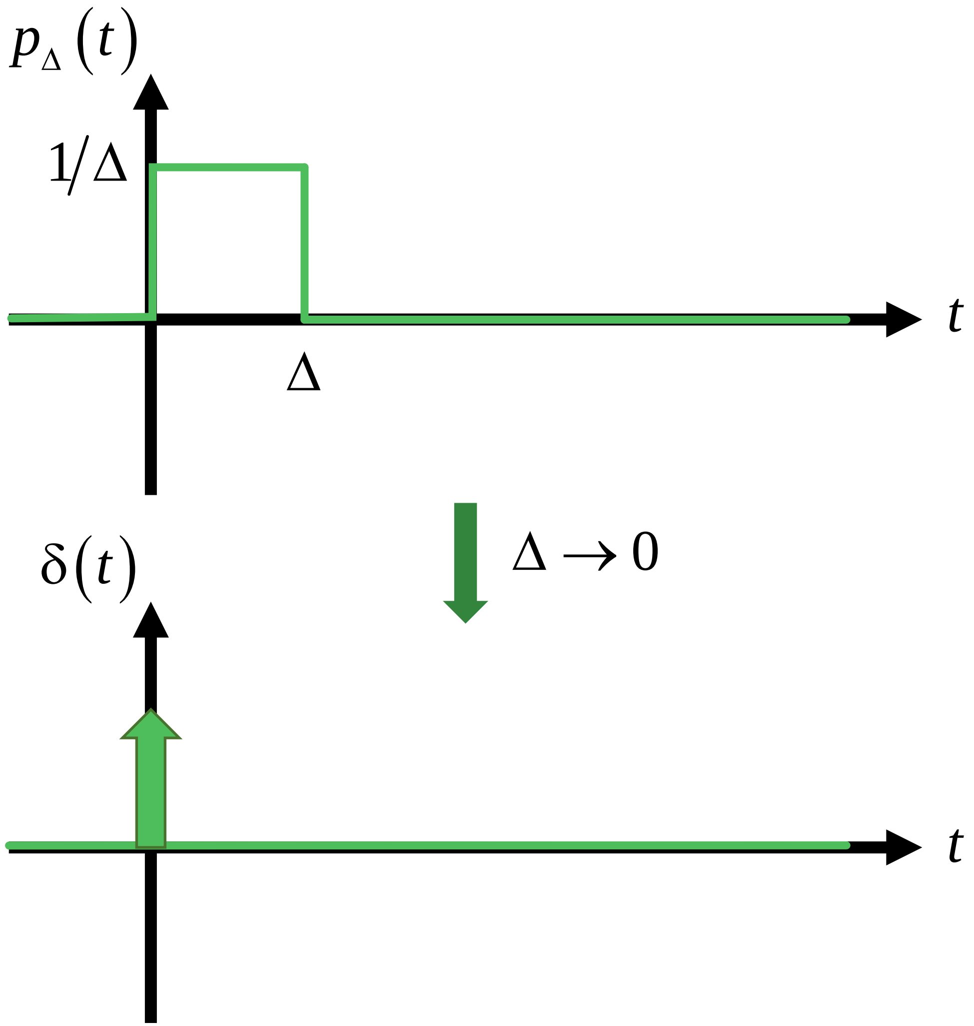
הלם יחידה

Unit impulse or Dirac's delta function

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{singular} & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} \delta(t')\,dt' = 1 \qquad \text{for all } \xi > 0$$

הלם יחידה



הקשר בין ההלם למדרגה

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{singular} & t = 0 \end{cases}$$

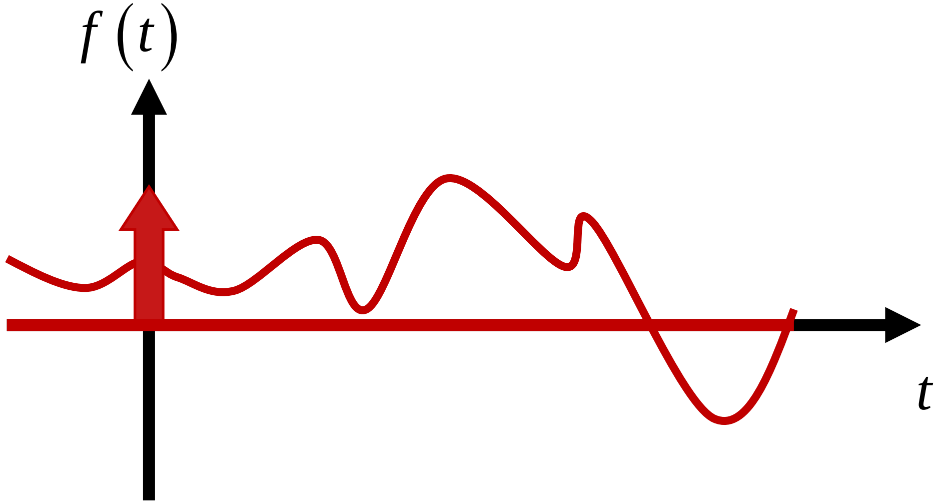
$$\int_{-\xi}^{\xi} \delta(t')\,dt' = 1 \qquad \text{for all } \xi > 0$$

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,dt'}$$

$$\boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

תכונת הדגימה של פונקציית דלתא

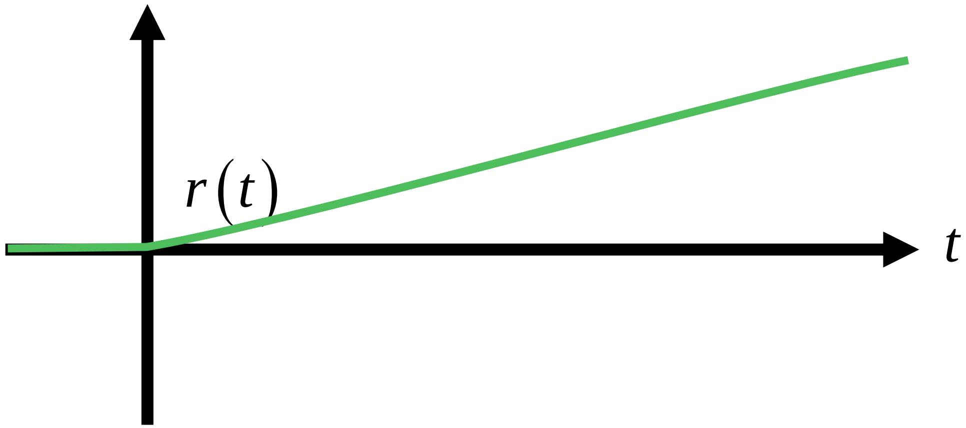


$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t')\delta(t')\,dt' = f(0)$$

למה זה נכון?

$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t')\delta(t')\,dt' =$$

פונקציית ramp $r(t)$

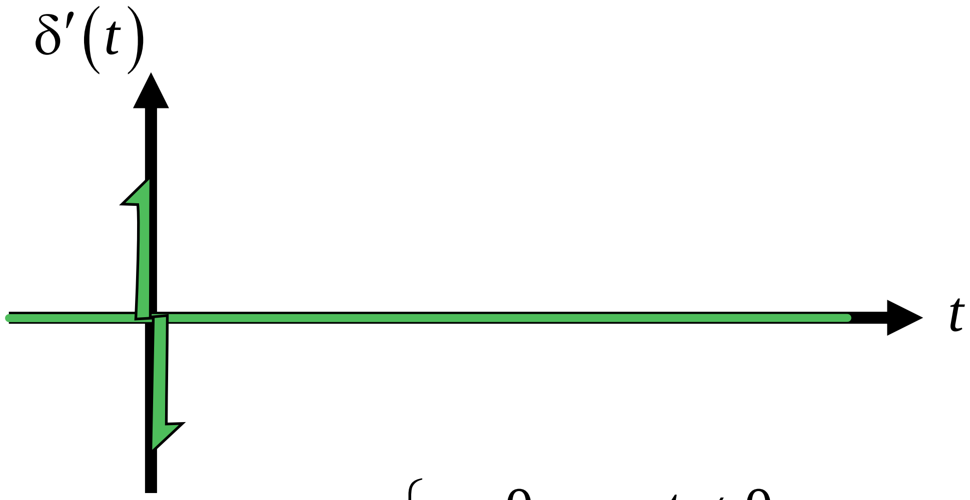


Ramp function

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t')\,dt'$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

doublet - דובלט



$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{singular} & t = 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta'(t')\,dt'$$

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

דובלט – תכונת הדגימה

$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t)\delta'(t')\,dt' = -f'(0) \qquad |f(t)| < \infty \quad \text{for} \;\; t = 0$$

$$\int_{-\xi}^{\xi} f(t)\delta'(t')\,dt' =$$

דוגמא

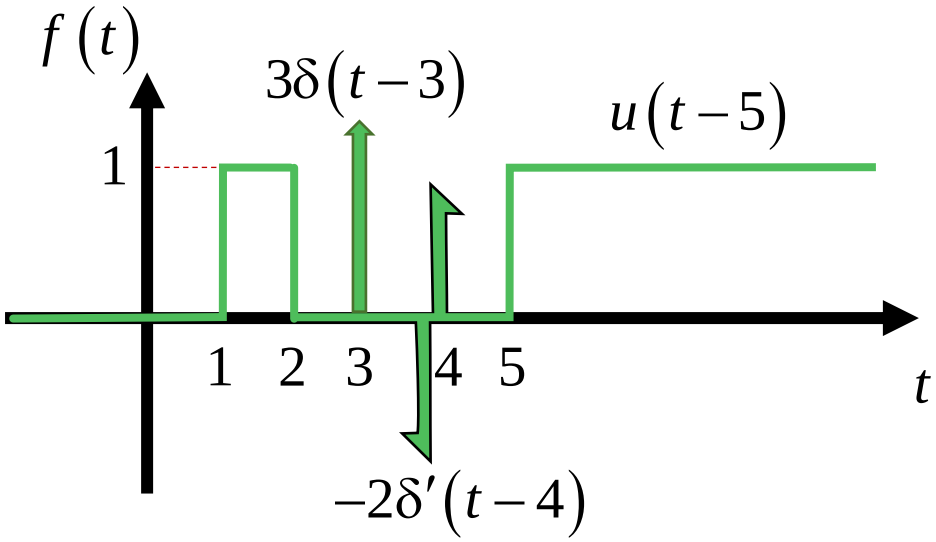
שרטט את הפונקציה הבאה:

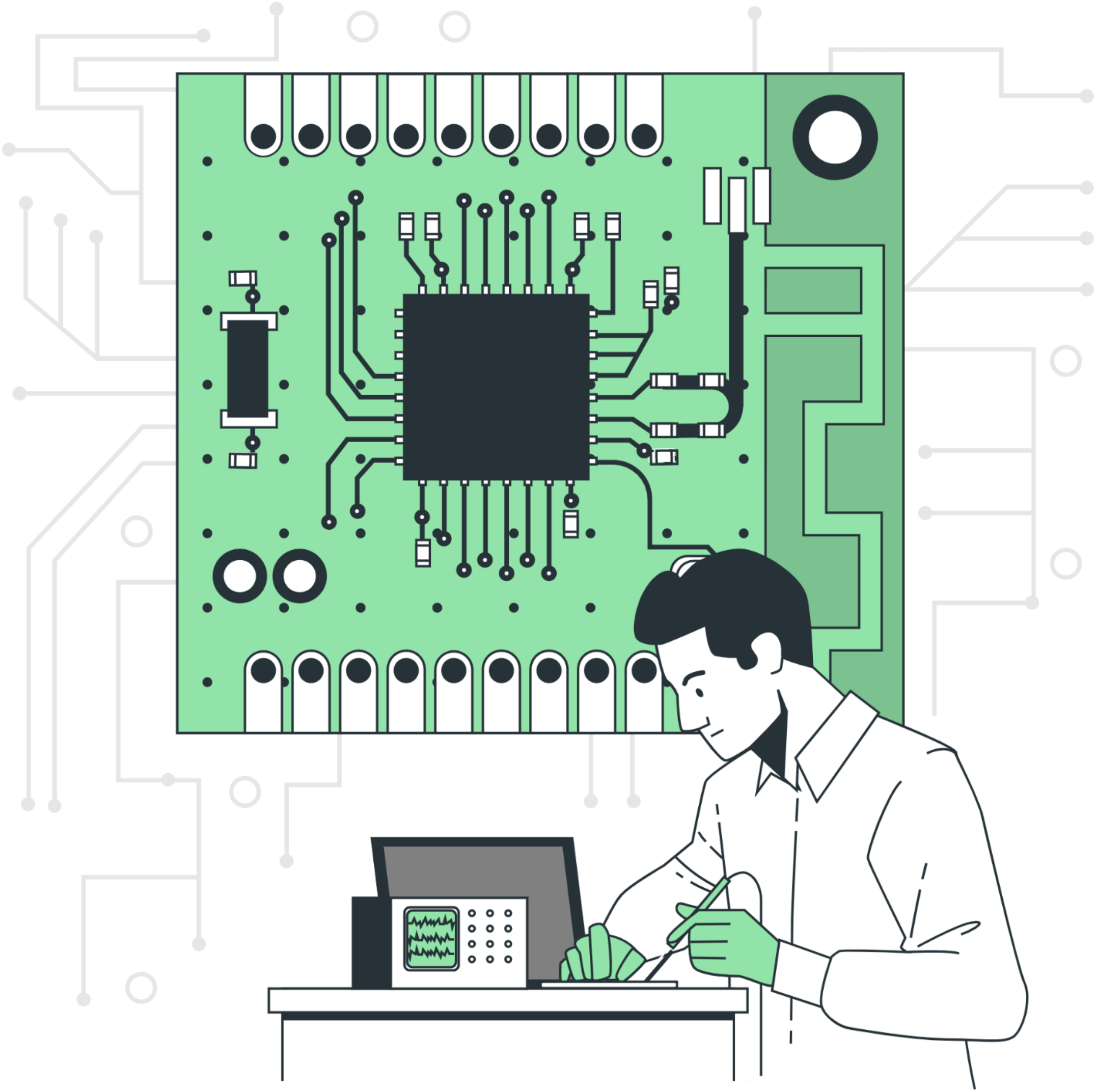
$$f\left(t\right)=u\left(t-1\right)-u\left(t-2\right)+$$

$$+\frac{d}{dt}3u\left(t-3\right)-\frac{d}{dt}2\delta\left(t-4\right)+\int_{-\infty}^{t}\delta\left(t'-5\right)dt'$$

דוגמא

$$f(t) = u(t-1) - u(t-2) + \\ + \frac{d}{dt}3u(t-3) - \frac{d}{dt}2\delta(t-4) + \int_{-\infty}^{t}\delta(t'-5)\,dt'$$





VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב

מעגלים ומערכות לינאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 3 : מעגלים – תופעות מעבר

מקטע 3.2 : מעגלים מסדר ראשון – חלק I

מה זה מעגלים מסדר ראשון?

First order circuits

כל המעגלים החשמליים אשר הפתרון שלהם מוביל למשוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר ראשון עם מקדמים קבועים. כלומר משוואה מהצורה:

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

מקור

$$x(0) = x_0$$

תנאי התחלה

בדרך כלל אלו מעגלים של קבל יחיד או סליל יחיד או מעגלים שאפשר לפשט אותם כך שיכללו קבל יחיד או סליל יחיד.

הפתרון מורכב משני חלקים:

Zero Input Response - ZIR

מנטרלים את המקור במעגל ומוצאים את
התגובה של המעגל לתנאי התחלה בלבד.

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0$$

איפסנו

$$x(0) = x_0$$

תנאי התחלה

ZIR

הפתרון מורכב משני חלקים:

Zero State Response - ZSR

מנטרלים את תנאי ההתחלה במעגל ומוצאים
את התגובה של המעגל למקור בלבד.

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=f(t)$$

מקור

$$x(0)=0$$

איפסנו

ZSR

הפתרון מורכב משני חלקים:

$$\frac{dx(t)}{dt}+ax(t)=f(t)$$

מקור

$$x_T(t)=x_{\text{ZSR}}(t)+x_{\text{ZIR}}(t)=$$

$$x(0)=x_0$$

תנאי התחלה

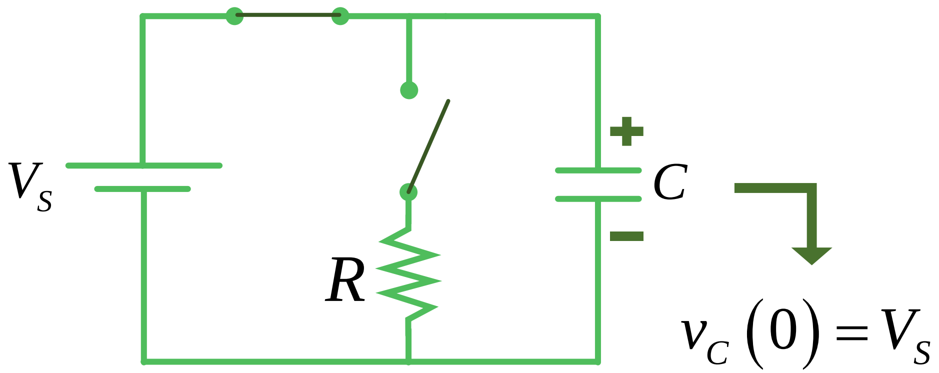
$$=x_{\text{ZSRH}}(t)+x_{\text{ZSRP}}(t)+x_{\text{ZIR}}(t)$$

פתרון ההומוגנית

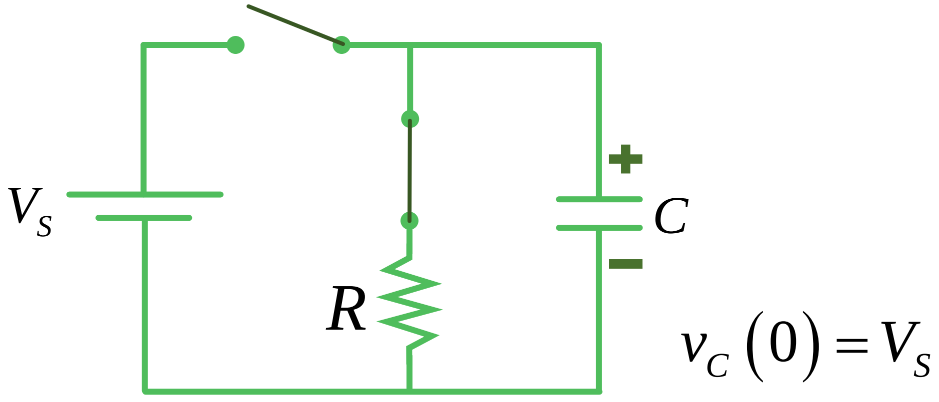
פתרון פרטי

פתרון ZIR למעגל עם קבל:

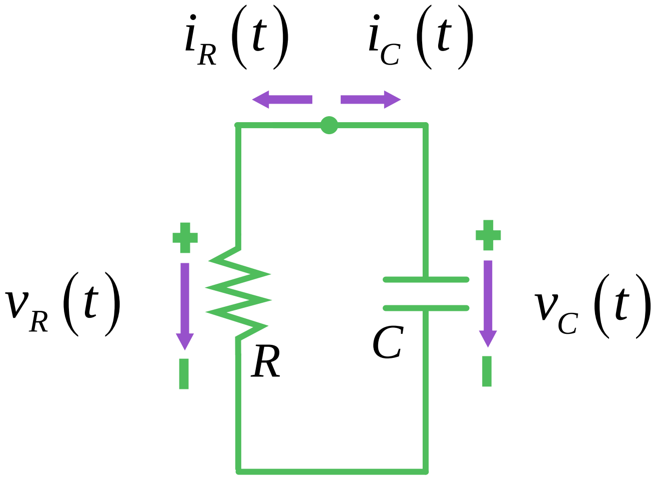
$t < 0$



$t \geq 0$



פתרון ZIR למעגל עם קבל:



KCL:

$$i_R(t)+i_C(t)=0$$

$$\frac{v_R(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

KVL:

$$v_R(t)-v_C(t)=0$$

$$\frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

פתרון ZIR למעגל עם קבל:

$$\frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=0\\&v_C(0)=V_S\end{aligned}}$$

קיבלנו מד"ר הומוגנית מסדר ראשון עם מקדמים קבועים

פתרון ZIR למעגל עם קבל:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$

נגדיר

$$v_C(0) = V_S$$

$$RC = \tau$$

$$v_C(t) = V_S e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

פתרון ZIR למעגל עם קבל:

$$v_C\left(t\right)=V_S e^{-t/\tau} \qquad t\geq 0$$

$$\tau = RC$$

τ מכונה קבוע הזמן של המעגל

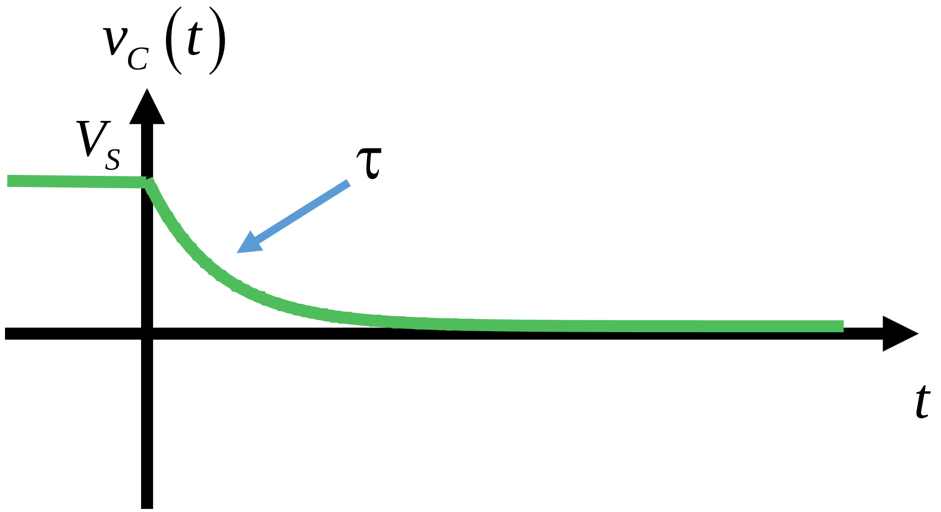
נבדוק את היחידות שלו:

$$\left[\tau\right]=\left[RC\right]=\left[\frac{V}{A}\right]\left[\frac{A}{V/\sec}\right]=\left[\sec\right]$$

מתח הקבל

$$v_C(t) = V_S e^{-t/\tau} \qquad t \ge 0$$

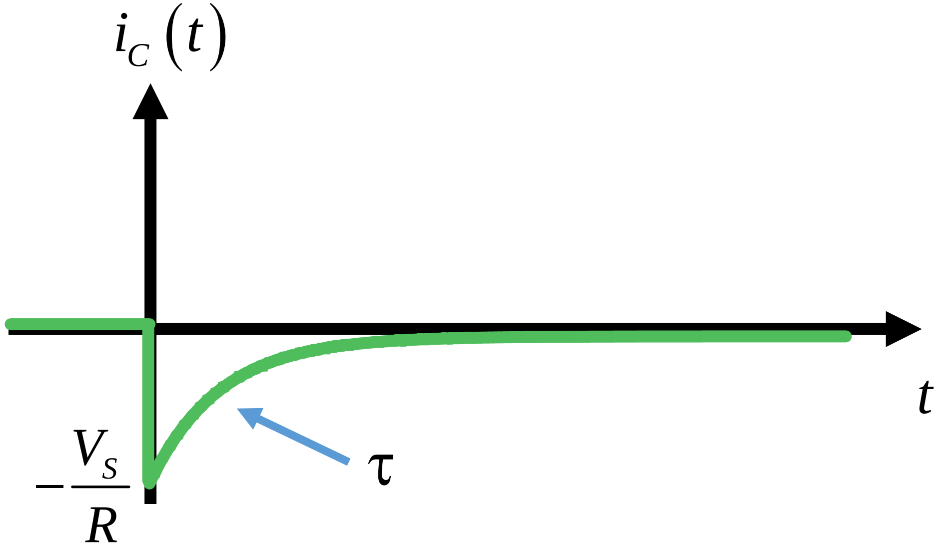
$$\tau = RC$$



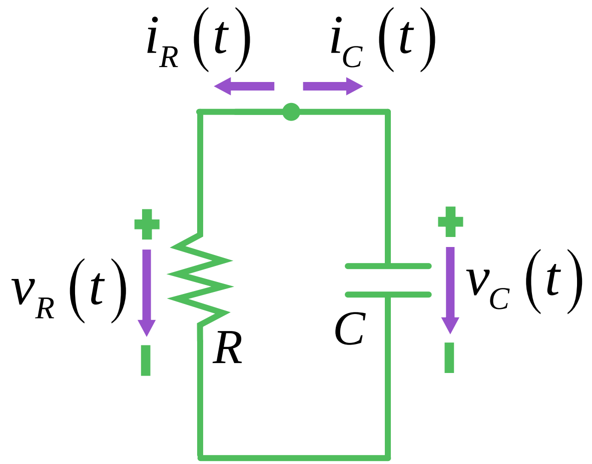
זרם הקבל

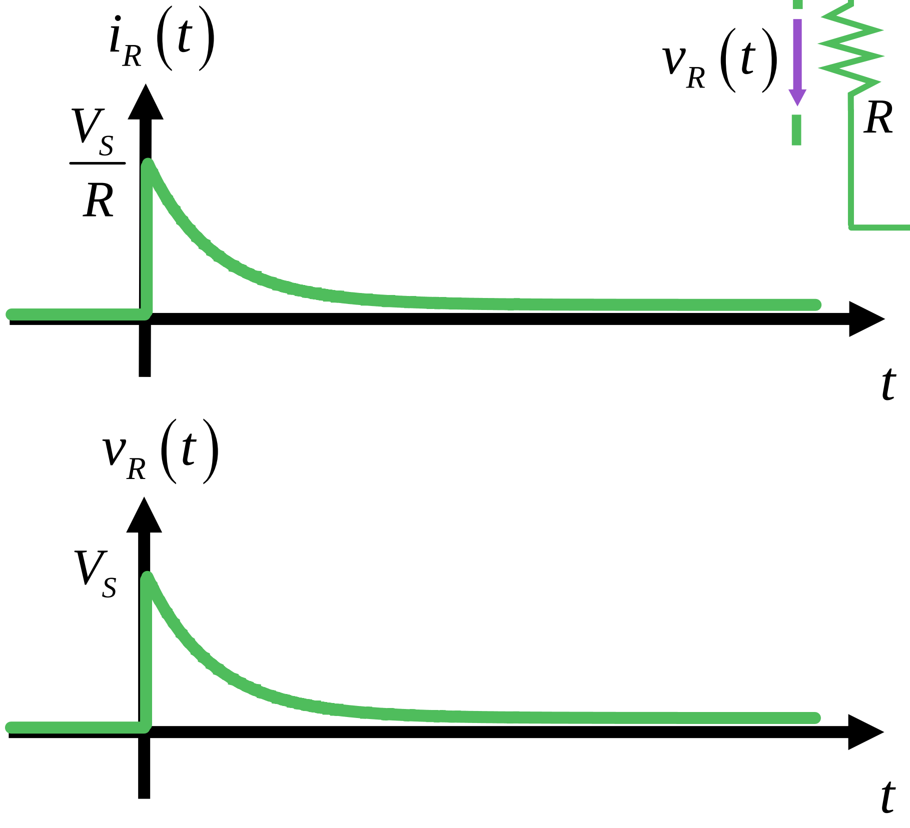
$$v_C(t) = V_S e^{-t/\tau}$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{d\left(V_S e^{-t/\tau}\right)}{dt} = -\frac{V_S}{R}e^{-t/\tau}$$



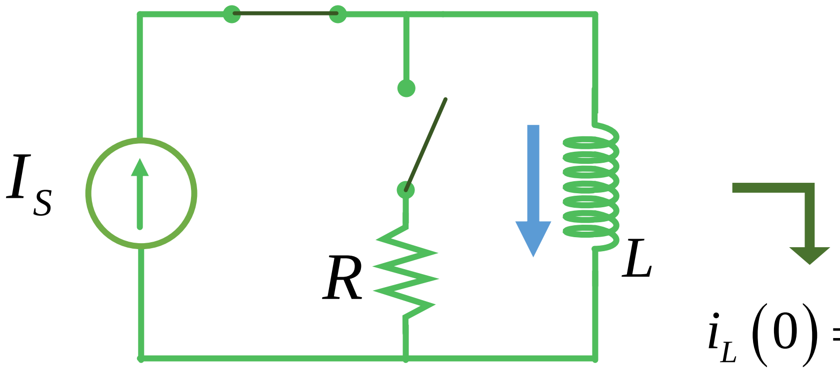
הזרם והמתח בנגד





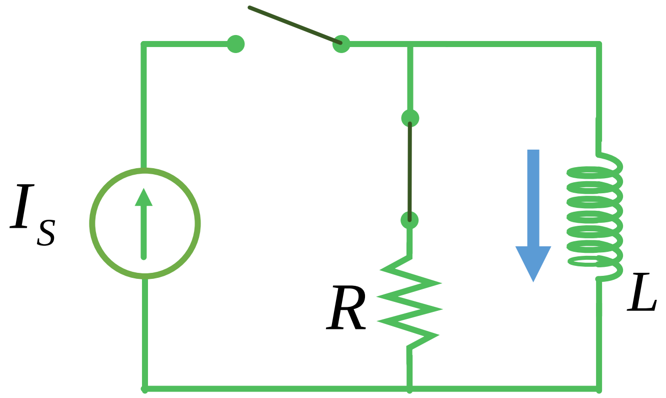
פתרון ZIR למעגל עם סליל:

$t < 0$



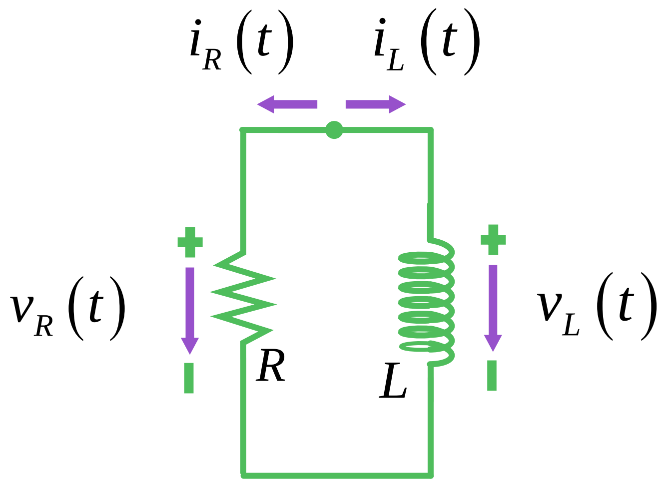
$i_L(0) = I_S$

$t \geq 0$



$i_L(0) = I_S$

פתרון ZIR למעגל עם סליל:



KCL:

$$i_R(t)+i_L(t)=0$$

$$Ri_L(t)+L\frac{di_L(t)}{dt}=0$$

KVL:

$$v_R(t)-v_L(t)=0$$

$$Ri_R(t)-L\frac{di_L(t)}{dt}=0$$

פתרון ZIR למעגל עם סליל:

$$Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = 0 \\ &i_L(0) = I_S \end{aligned}}$$

ושוב קיבלנו מד"ר הומוגנית מסדר ראשון עם מקדמים קבועים

פתרון ZIR למעגל עם סליל:

$$i_L(t) = I_S e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

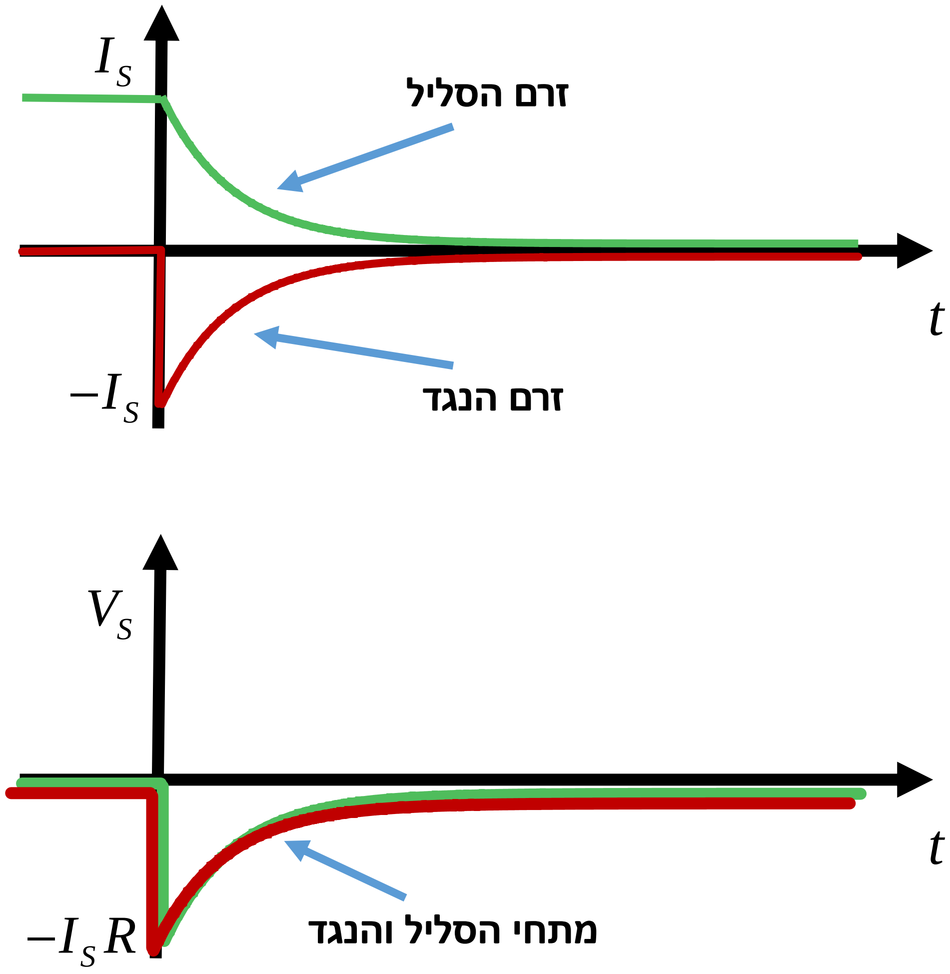
$$\tau = L/R$$

τ מכונה קבוע הזמן של המעגל

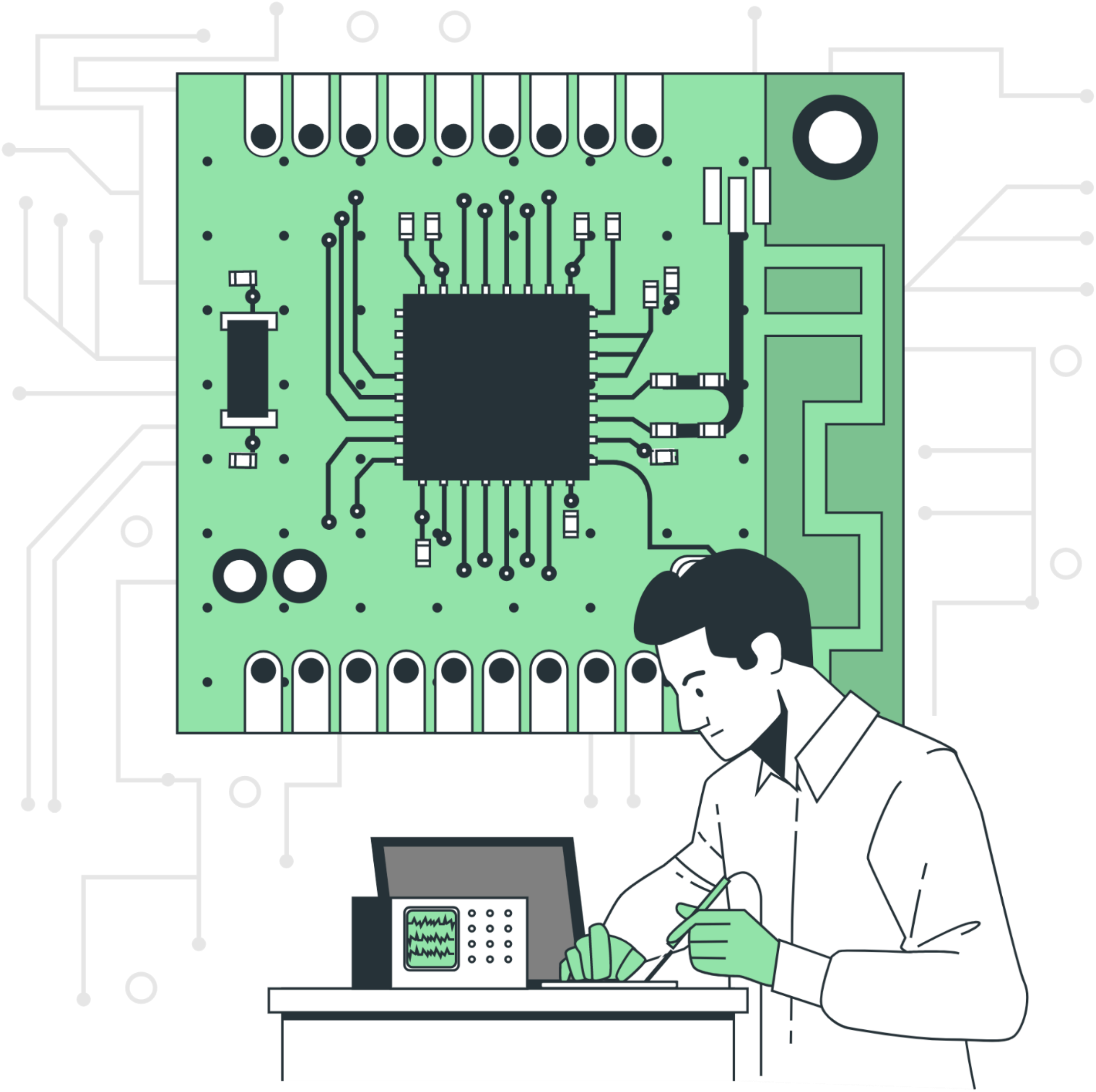
נבדוק את היחידות שלו:

$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{V}{A}\right]\left[\frac{A}{V/\sec}\right] = [\sec]$$

זרמים ומתחים במעגל



VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות ליניאריות

פרופ' אבישי אייל

יחידה 3 : מעגלים – תופעות מעבר

מקטע 3.3 : מעגלים מסדר ראשון – חלק II

הפתרון מורכב משני חלקים:

Zero Input Response - ZIR

מנטרלים את המקור במעגל ומוצאים את
התגובה של המעגל לתנאי התחלה בלבד.

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0$$

איפסנו

$$x(0) = x_0$$

תנאי התחלה

ZIR

ועכשיו לחלק השני של הפתרון

Zero State Response - ZSR

מנטרלים את תנאי ההתחלה במעגל ומוצאים
את התגובה של המעגל למקור בלבד.

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

מקור

$$x(0) = 0$$

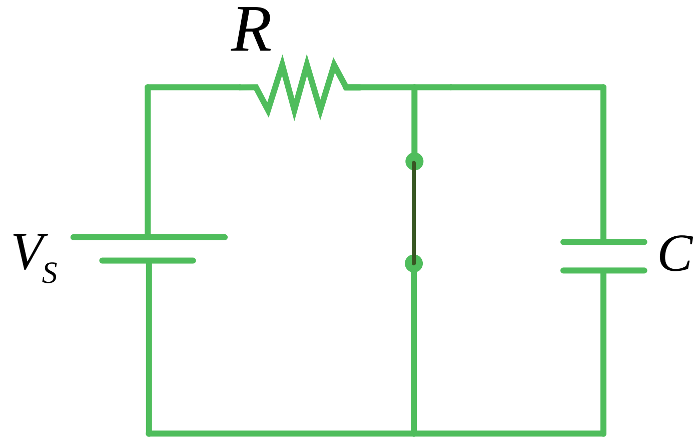
איפסנו

ZSR = ZSRH + ZSRP

פתרון ההומוגנית   פתרון פרטי

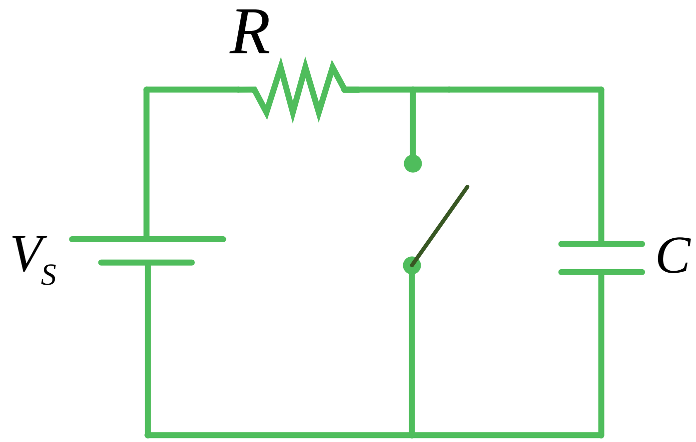
פתרון ZSR למעגל עם קבל:

$t<0$

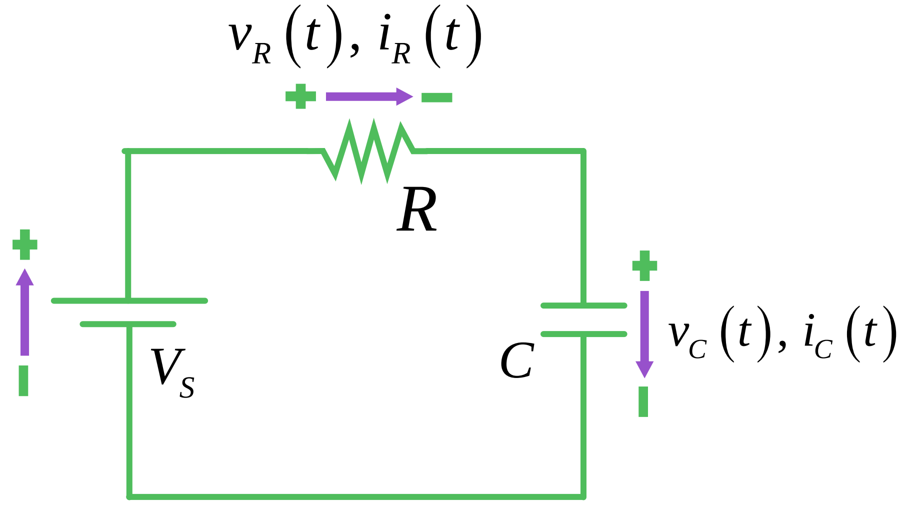


$v_C(0)=0$

$t\geq 0$



פתרון ZSR למעגל עם קבל:



KCL:

$$i_R(t)=i_C(t)$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=V_S$$

KVL:

$$v_R(t)+v_C(t)=V_S$$

$$Ri_R(t)+v_C(t)=V_S$$

פתרון ZSR למעגל עם קבל:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=V_S$$

$$v_C(0)=0$$

קיבלנו מד"ר **לא הומוגנית** מסדר ראשון
עם מקדמים קבועים **ותנאי התחלה אפס**

פתרון המשוואה ההומוגנית:

ZSRH

$$RC\frac{dv_C^H(t)}{dt}+v_C^H(t)=0$$

$$RC=\tau$$

$$v_C^H(t)=Ae^{-t/\tau} \qquad t\geq 0$$

פתרון פרטי:

ZSRP

$$RC\frac{dv_C^P(t)}{dt}+v_C^P(t)=V_S$$

$$v_C^P(t)=V_S \qquad t\geq 0$$

פתרון ה- ZSR הכולל:

ZSR = ZSRH + ZSRP

פתרון ההומוגנית פתרון פרטי

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau} + V_S \qquad t \geq 0$$

נציב תנאי התחלה:

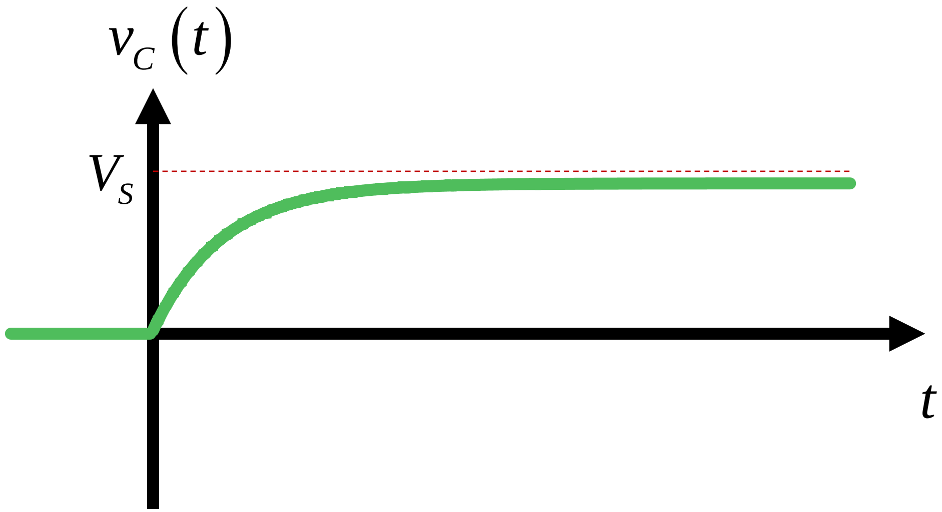
$$v_C(0) = A + V_S = 0$$

$$\boxed{v_C(t) = V_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad t \geq 0}$$

פתרון ה- ZSR הכולל:

$$v_C(t) = V_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad t \geq 0$$

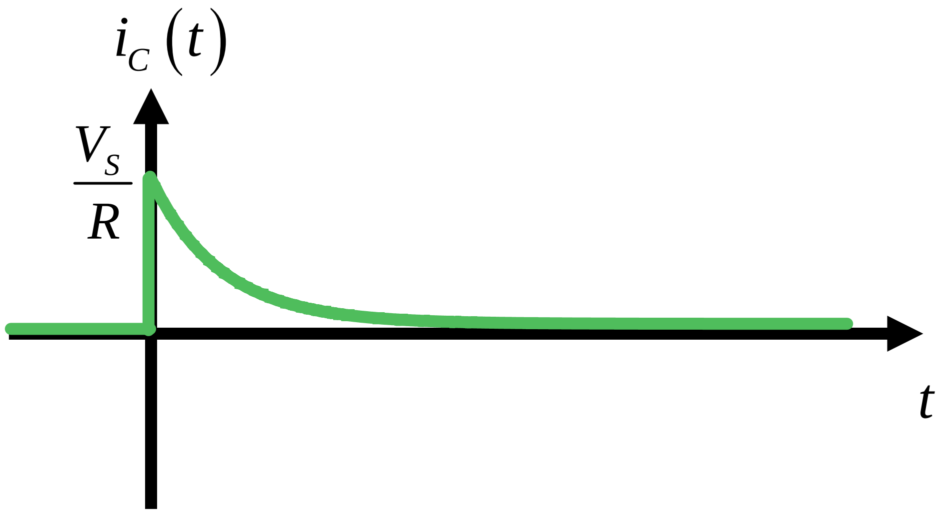
$$\tau = RC$$



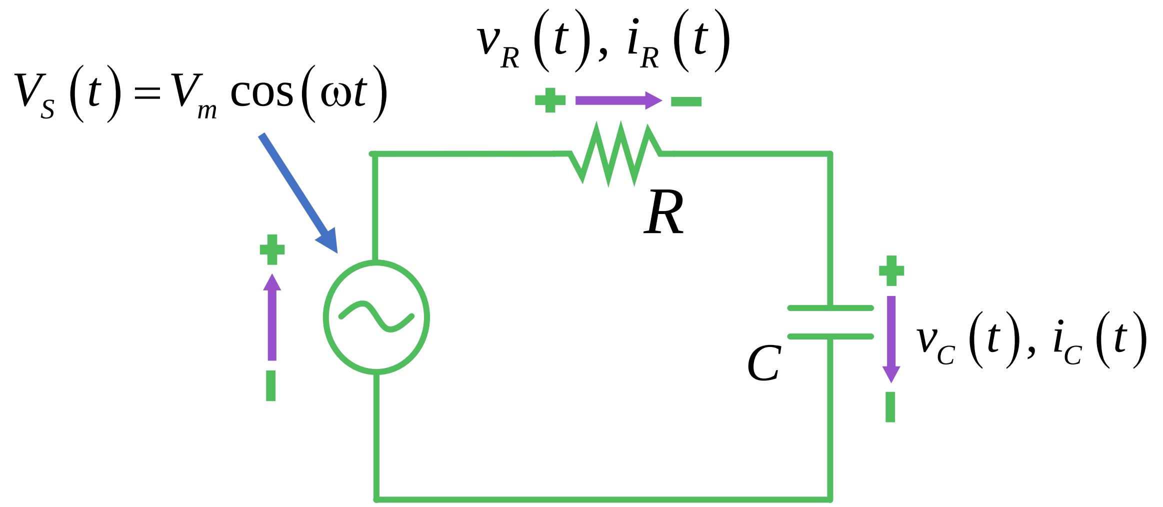
זרם הקבל

$$v_C(t) = V_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad t \ge 0$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V_S}{R}e^{-t/\tau}$$



פתרון ZSR עבור מקור סינוסואידלי:



KCL:

$$i_R(t) = i_C(t)$$

KVL:

$$v_R(t) + v_C(t) = V_S(t)$$

$$Ri_R(t) + v_C(t) = V_S(t)$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_S(t)$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

ZSRH

$$RC\frac{dv_C^H(t)}{dt}+v_C^H(t)=0$$

$$RC=\tau$$

$$v_C^H(t)=Ae^{-t/\tau}\qquad t\geq 0$$

פתרון פרטי:

ZSRP

$$\boxed{RC\frac{dv_C^P(t)}{dt}+v_C^P(t)=V_m\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{v_C^P(t)=B\cos(\omega t+\phi)\qquad t\ge 0}$$

פתרון פרטי:

$$RC\frac{dv_C^P(t)}{dt}+v_C^P(t)=V_m\cos(\omega t)$$

$$v_C^P(t)=B\cos(\omega t+\phi)$$

$$-\omega\tau B\sin(\omega t+\phi)+B\cos(\omega t+\phi)=V_m\cos(\omega t)$$

פתרון פרטי:

$$-\omega\tau B\sin\left(\omega t+\phi\right)+B\cos\left(\omega t+\phi\right)=V_m\cos\left(\omega t\right)$$

נפתור בעזרת הייצוג הפאזורי של האותות הסינוסואידליים

$$-\omega\tau Be^{j(\phi-\pi/2)}+Be^{j\phi}=V_m$$

$$j\omega\tau Be^{j\phi}+Be^{j\phi}=V_m$$

$$Be^{j\phi}=\frac{V_m}{1+j\omega\tau}=\frac{V_m\left(1/j\omega C\right)}{1/j\omega C+R}$$

פתרון פרטי:

$$Be^{j\phi} = \frac{V_m}{1+j\omega\tau} = \frac{V_m\left(1/j\omega C\right)}{1/j\omega C+R}$$

$$B = \frac{V_m}{\sqrt{1+\left(\omega\tau\right)^2}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\omega\tau\right)$$

פתרון ה- ZSR הכולל:

ZSR = ZSRH + ZSRP

פתרון ההומוגנית　　פתרון פרטי

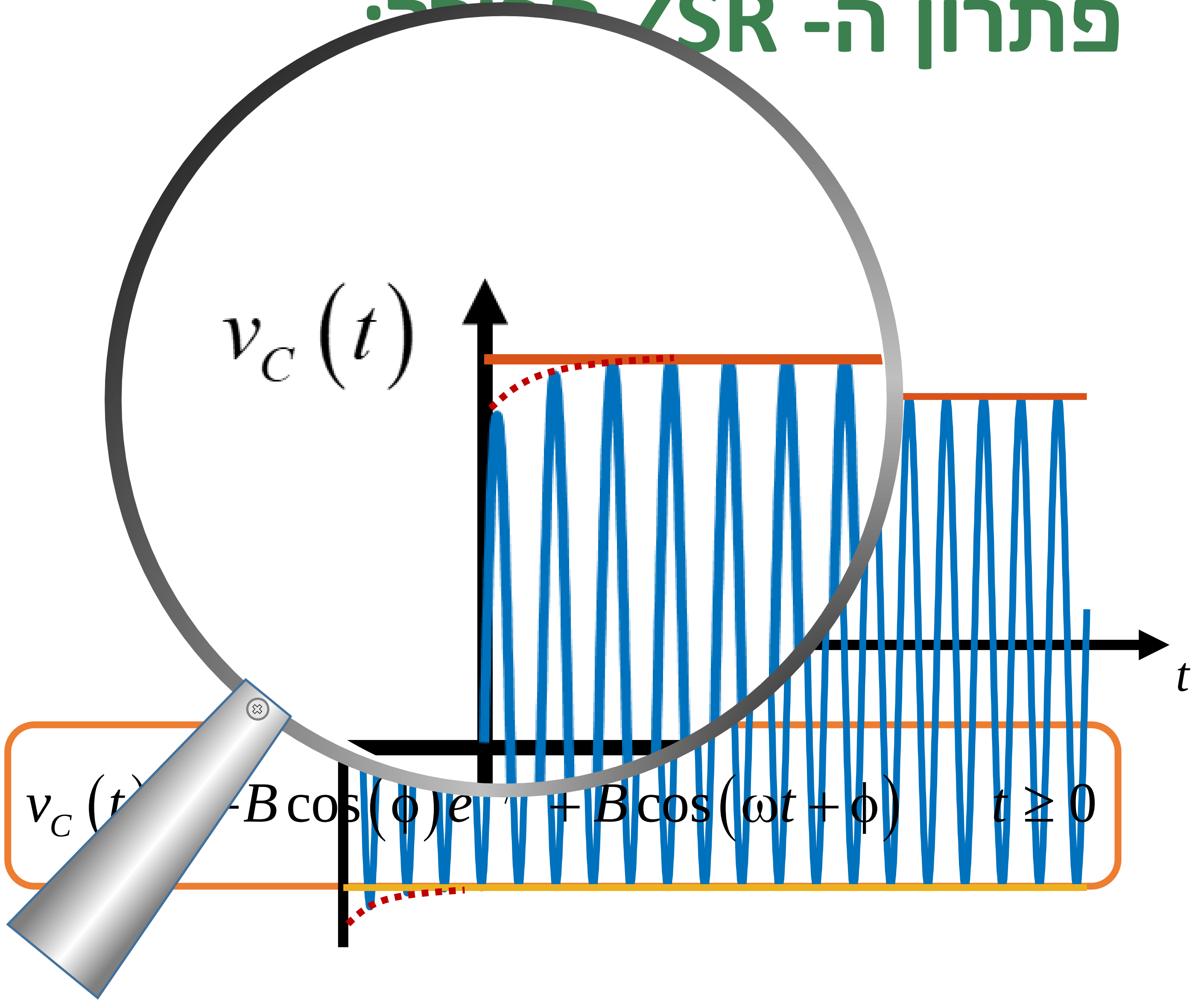
$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau} + B\cos(\omega t + \phi) \qquad t \geq 0$$

נציב תנאי התחלה:

$$v_C(0) = A + B\cos(\phi) = 0$$

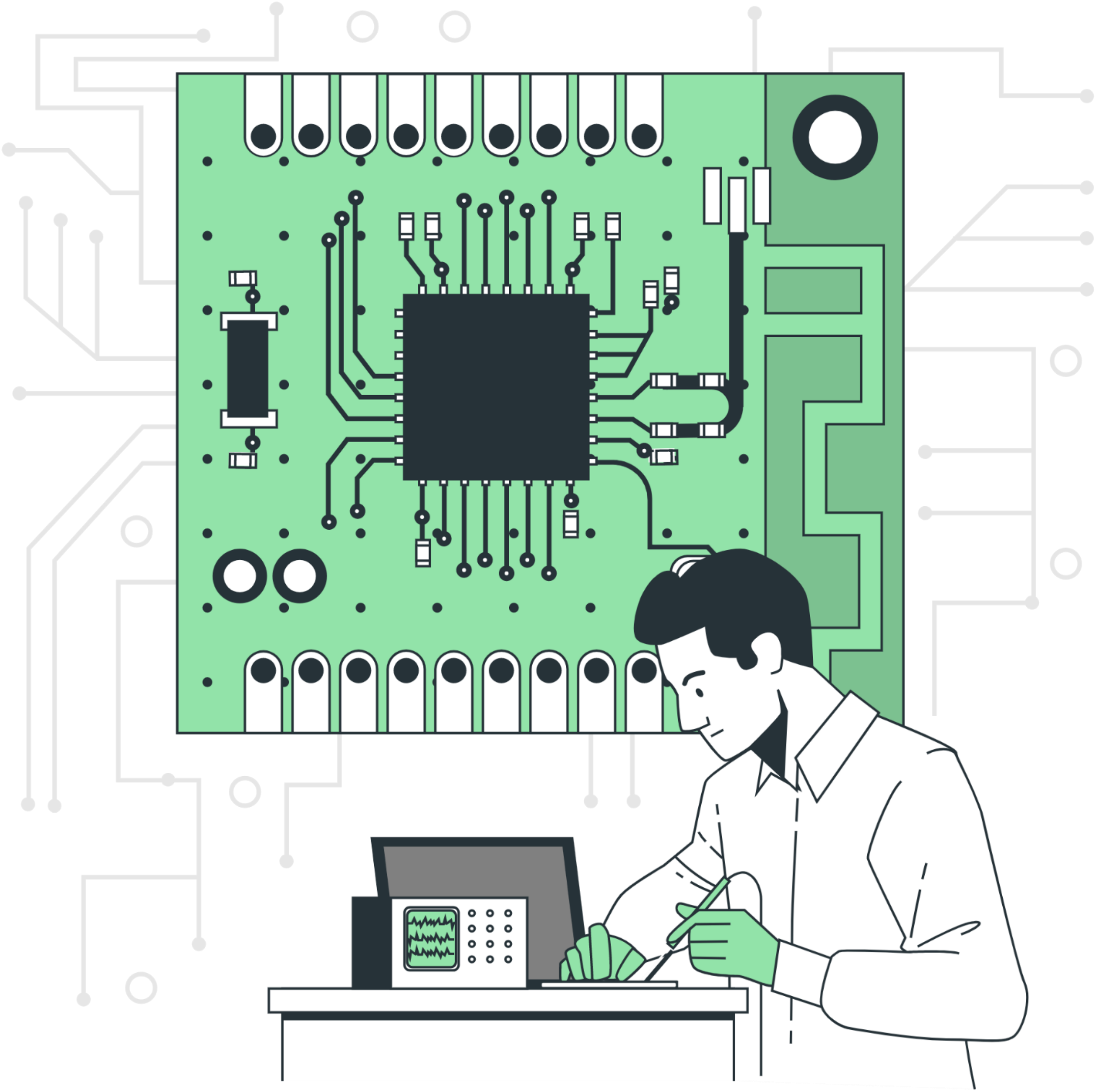
$$\boxed{v_C(t) = -B\cos(\phi)e^{-t/\tau} + B\cos(\omega t + \phi) \qquad t \geq 0}$$

פתרון ה- ZSR ...:



$$v_C(t) \; ... \; -B\cos(\phi)e \; ... \; +B\cos(\omega t+\phi) \qquad t \geq 0$$

VIRTUALTAU
פדגוגיה דיגיטלית
אוניברסיטת תל אביב



מעגלים ומערכות לינאריות

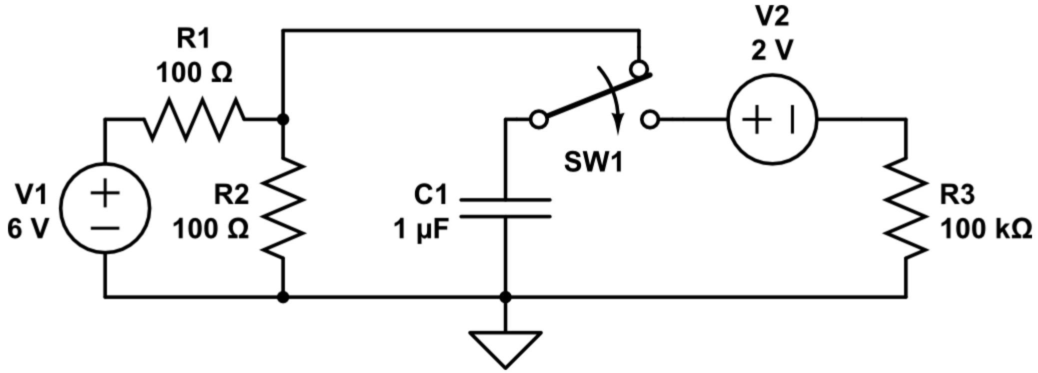
פרופ' אבישי אייל

יחידה 3 : מעגלים – תופעות מעבר

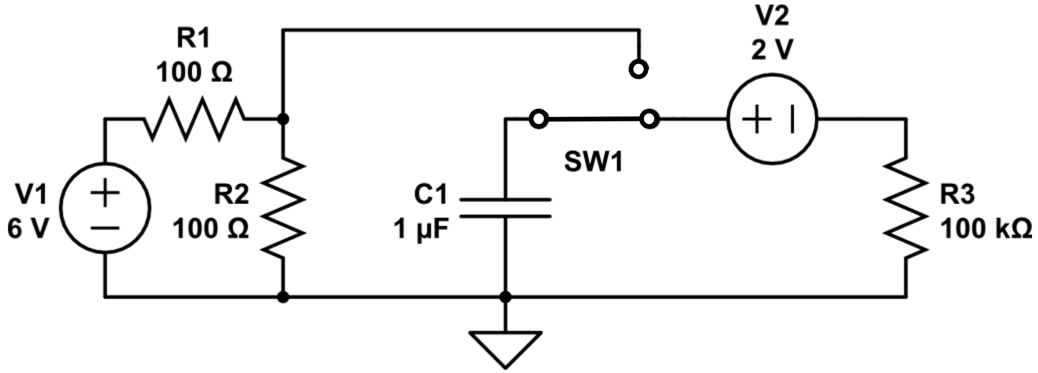
מקטע 3.4 : מעגלים מסדר ראשון – חלק III

פתרון כולל של מעגל סדר ראשון

$t < 0$

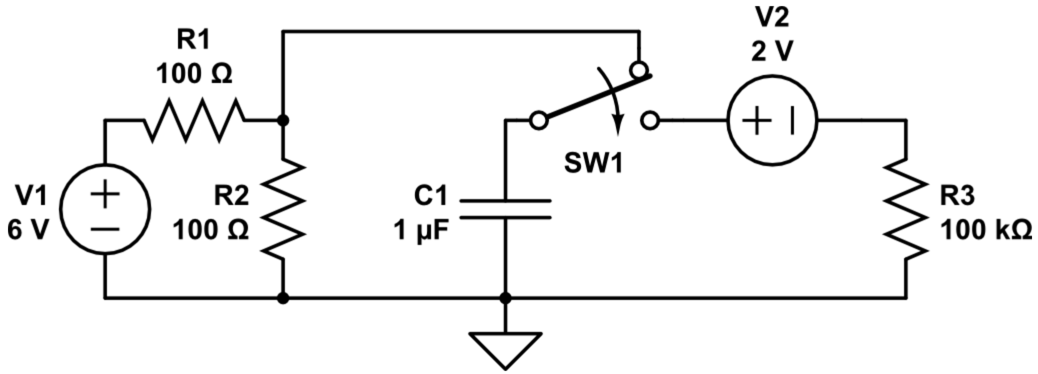


$t \geq 0$

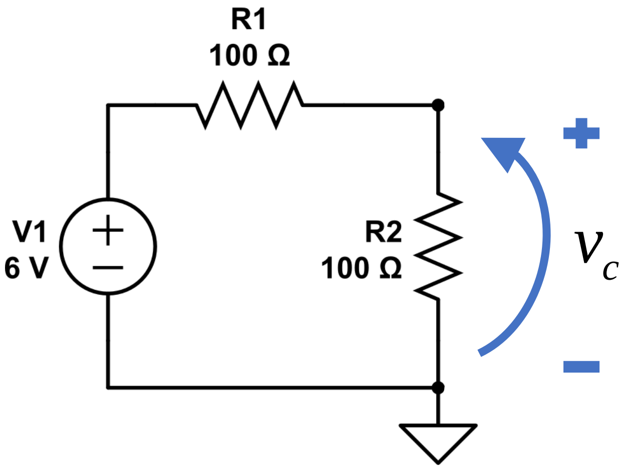


ראשית נמצא תנאי התחלה

$t < 0$



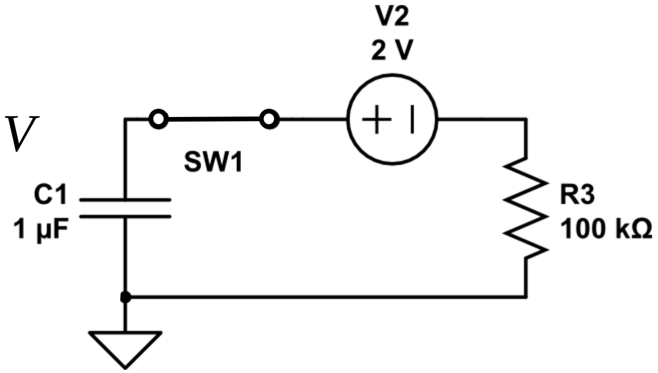
$t < 0$



$$v_c(0) = 3\ V$$

אחרי t=0 נותרנו עם:

$$v_c(0) = 3\ V$$

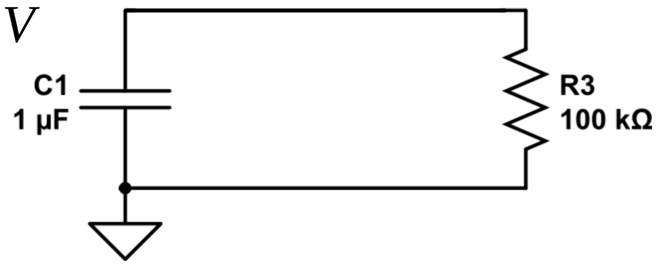


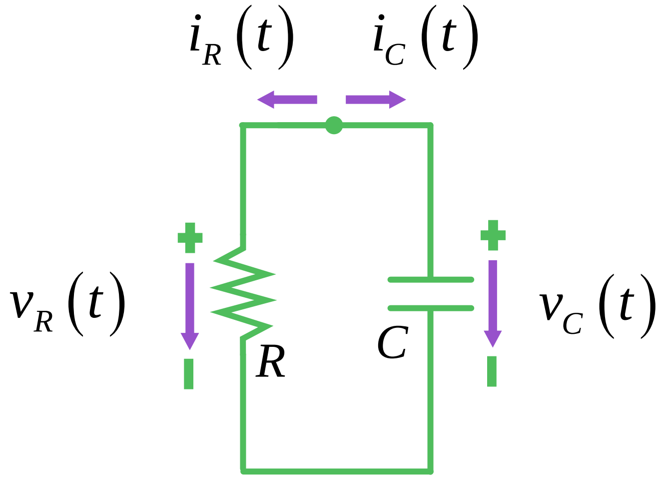
$$t \geq 0$$

1. ZIR
2. ZSR = ZSRH + ZSRP

פתרון ZIR

$v_c(0) = 3\ V$





פתרון ZIR:

KCL:

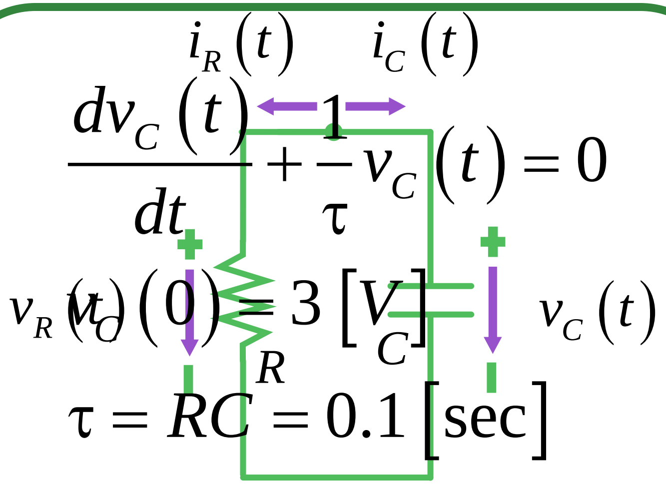
$$i_R(t)+i_C(t)=0$$

$$\frac{v_R(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$

KVL:

$$v_R(t)-v_C(t)=0$$

$$\frac{v_C(t)}{R}+C\frac{dv_C(t)}{dt}=0$$



$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v_C(t)=0$$

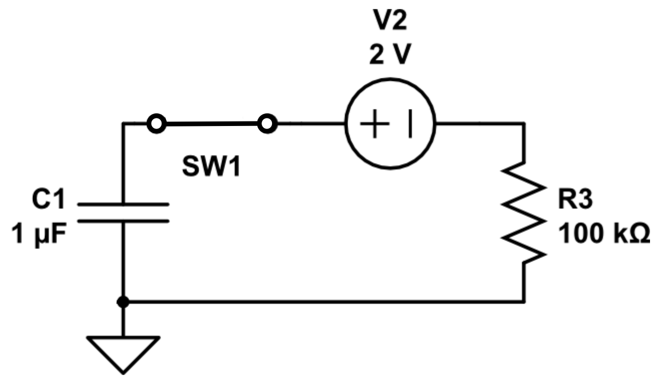
$$v_C(0)=3\,[V]$$

$$\tau=RC=0.1\,[\sec]$$

פתרון ה- ZIR

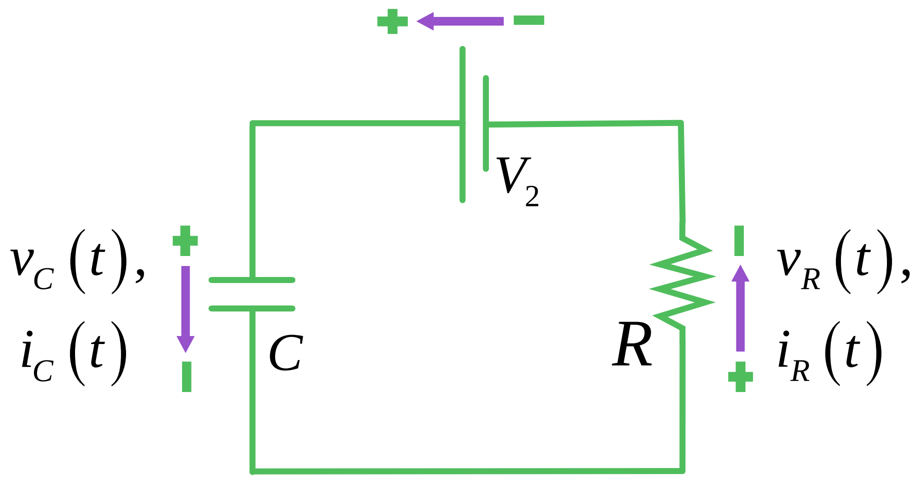
$$v_C(t) = 3e^{-t/0.1} \qquad t \geq 0$$

פתרון ה- ZSR



$$v_c\cancel{(0)=3}\,V$$

$$v_c(0)=0\ V$$



פתרון ה- ZSR:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=V_2$$

$$v_C(0)=0$$

$$\tau\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=2$$

$$v_C(0)=0\,[V]$$

$$\tau=0.1\,[\sec]$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

ZSRH

$$\tau \frac{dv_C^H(t)}{dt} + v_C^H(t) = 0$$

$$v_C^H(t) = Ae^{-t/0.1} \qquad t \geq 0$$

פתרון פרטי:

ZSRP

$$\tau \frac{dv_C^P(t)}{dt} + v_C^P(t) = 2$$

$$v_C^P(t) = 2 \qquad t \geq 0$$

פתרון ה- ZSR הכולל:

ZSR = ZSRH + ZSRP

פתרון ההומוגנית   פתרון פרטי

$$v_C(t) = Ae^{-t/0.1} + 2 \qquad t \geq 0$$

נציב תנאי התחלה:

$$v_C(0) = A + 2 = 0$$

$$\boxed{v_C(t) = 2\left(1 - e^{-t/0.1}\right) \qquad t \geq 0}$$

הפתרון הכולל:

ZIR + ZSR

$$v_C^{ZIR}\left(t\right)=3e^{-t/0.1}\qquad t\geq 0$$

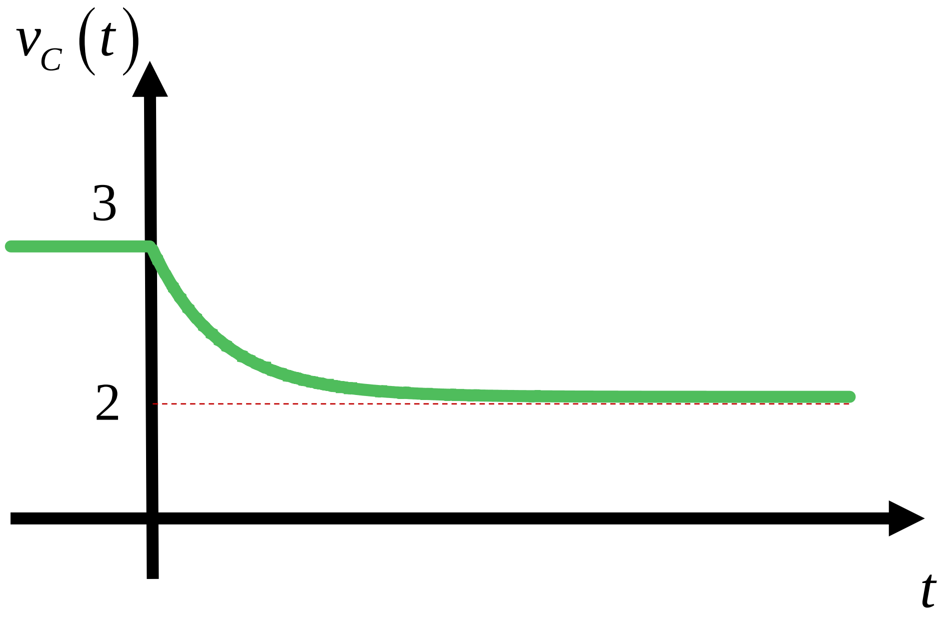
$$v_C^{ZSR}\left(t\right)=2\left(1-e^{-t/0.1}\right)\qquad t\geq 0$$

$$v_C^{total}\left(t\right)=2\left(1-e^{-t/0.1}\right)+3e^{-t/0.1}\qquad t\geq 0$$

הפתרון הכולל:

$$v_C^{total}(t) = 2\left(1 - e^{-t/0.1}\right) + 3e^{-t/0.1} = \qquad t \geq 0$$

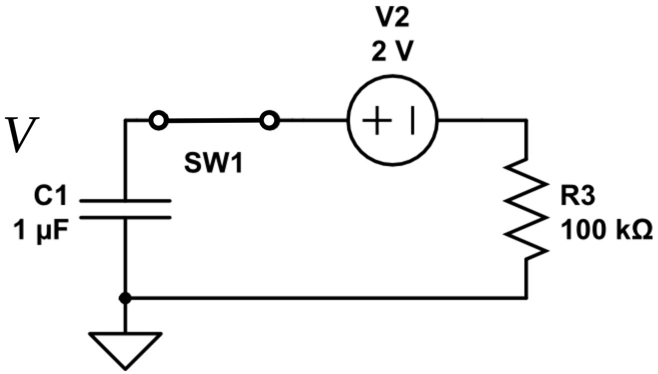
$$= 2 + e^{-t/0.1}$$



מצב מתמיד ותופעות מעבר

$t \geq 0$

$v_c(0) = 3\ V$



$$v_C^{total}(t) = 2\left(1 - e^{-t/0.1}\right) + 3e^{-t/0.1} \qquad t \geq 0$$

קבוע הזמן

$$v_C^{total}(t) = V_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + V_0^C e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

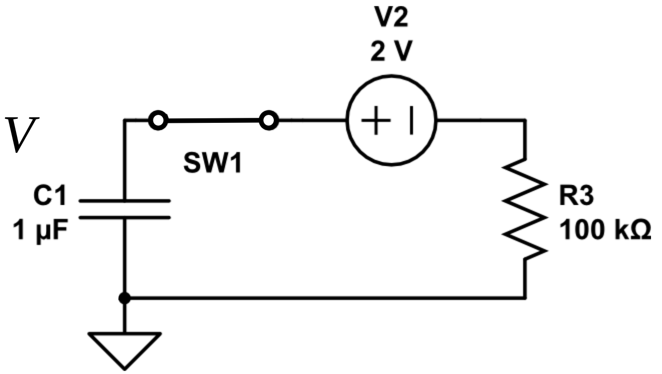
מתח המקור

תנאי התחלה

מצב מתמיד ותופעות מעבר

$t \geq 0$

$v_c(0) = 3\,V$



$$v_C^{total}(t) = V_S\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + V_0^C e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

$$v_C^{total}(t) = \underbrace{V_S}_{\text{מצב מתמיד}} + \underbrace{\left(V_0^C - V_S\right)e^{-t/\tau}}_{\text{תופעת מעבר}} \qquad t \geq 0$$