דף נוסחאות – מעגלים ומערכות ליניאריות

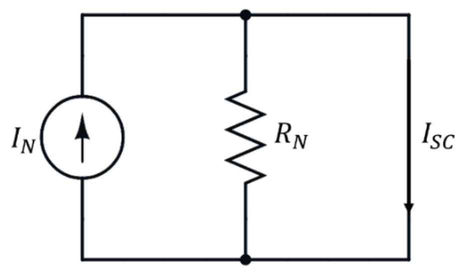
	נגד $[\Omega]$	קבל $[F]$	סליל $[H]$
זרם / מתח	$V_R = RI_R$	$I_C = C\dfrac{dV_c}{dt}$	$V_L = L\dfrac{dI_L}{dt}$
תנאי רציפות	אין תנאי רציפות	מתח הקבל רציף כל עוד אין עירור מסוג דלתא או נגזרותיו.	זרם הסליל רציף כל עוד אין עירור מסוג דלתא או נגזרותיו.
אנרגיה $E = \int P(t)dt$	$E = \int I_R(t)V_R(t)dt$	$E_C = \dfrac{1}{2}CV_C^2$	$E_L = \dfrac{1}{2}LI_L^2$
חיבור טורי	$R_{eq} = \sum_k R_k$	$\dfrac{1}{C_{eq}} = \sum_k \dfrac{1}{C_k}$	$L_{eq} = \sum_k L_k$
חיבור מקבילי	$\dfrac{1}{R_{eq}} = \sum_k \dfrac{1}{R_k}$	$C_{eq} = \sum_k C_k$	$\dfrac{1}{L_{eq}} = \sum_k \dfrac{1}{L_k}$
מצב סינוסי עמיד	R	$\dfrac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$

חוקי קירכהוף: KVL: סכום המתחים בחוג סגור שווה לאפס.

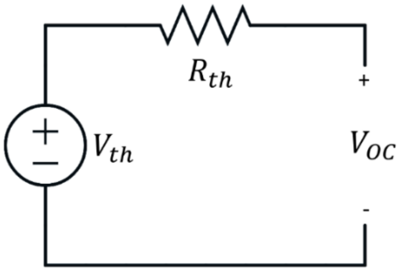
KCL: סכום הזרמים בצומת שווה לאפס.

הספק: $P(t) = I(t)V(t)$

שקול נורטון:



שקול תבנין:



זרמי חוגים	מתחי צמתים
עבור מעגל בו כל המקורות הם מקורות מתח בצורת שקול תבנין (מקור מתח עם התנגדות בטור)	עבור מעגל בו כל המקורות הם מקורות זרם בצורת שקול נורטון (מקור זרם עם התנגדות במקביל)
$\begin{bmatrix} R \\ n \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ n \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ n \times 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} G \\ n \times n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ n \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ n \times 1 \end{bmatrix}$

<u>מד"ר מסדר ראשון</u>:

$$\dot{y} + s \cdot y = f(t)\ ,\ \ y(0^-) = K$$

ZIR

$$\dot{y} + s \cdot y = 0\ ,\ \ y(0^-) = K$$

פתרון מהצורה:

$$y(t) = K \cdot e^{-st}$$

ZSR

$$\dot{y} + s \cdot y = f(t)\ ,\ \ y(0^-) = 0$$

פתרון מהצורה:

$$y(t) = \left[y_p(t) + y_h(t)\right] \cdot u(t)$$

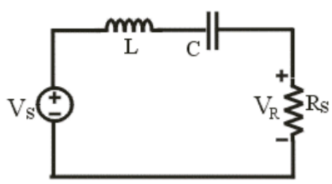
<u>מד"ר מסדר שני</u>: $\ddot{y} + 2\alpha \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = f(t)$.

- משוואה אופיינית: $s^2 + 2\alpha \cdot s + \omega_0^2 = 0$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ (עבור תת ריסון)
- פתרונות לריסונים שונים:
  - $y_h = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$.
  - $y_h = (A + Bt)e^{-\alpha t}$.
  - $y_h = e^{-\alpha t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t))$.

<u>קונבולוציה</u>: $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$.

<u>מעגלי תהודה - RLC</u>

מעגל RLC טורי:



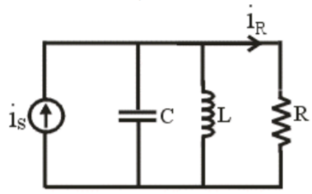
$$Q = \frac{w_0}{2\alpha} = \frac{w_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$H(jw) = \frac{V_R}{V_S}$$

$$Z(jw) = \frac{V_S}{I} = \frac{V_S R}{V_R} = \frac{R}{H(jw)}$$

מעגל RLC מקבילי:



$$Q = \frac{w_0}{2\alpha} = w_0 CR = \frac{R}{w_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$H(jw) = \frac{I_R}{I_S}$$

$$Y(jw) = \frac{I_S}{V} = \frac{1}{RH(jw)}$$

	***RLC* מקבילי**	***RLC* טורי**
Q	$\frac{\omega_0}{2\alpha}$	
α	$\frac{1}{2RC}$	$\frac{R}{2L}$
ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	

$$H(jw) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w}\right)}$$

$$w_1 = w_0\left(1 - \frac{1}{2Q} + \frac{1}{8Q^2}\right) \qquad w_2 = w_0\left(1 + \frac{1}{2Q} + \frac{1}{8Q^2}\right)$$

$$\Delta W = \frac{w_0}{Q} = 2\alpha$$

מצב סינוסי עמיד

<u>הצגה פאזורית</u>: $V(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \ \rightarrow \ \hat{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle\theta$

<u>גודל אפקטיבי</u>: $V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T V^2(\tau)d\tau} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2(\tau)d\tau} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

<u>הספקים:</u>

- <u>הספק רגעי</u>: $P(t) = V(t) \cdot I(t)$, מרוכב: $S = \frac{1}{2}\hat{V} \cdot \hat{I}^*$.
- <u>הספק ממוצע</u>: $P_{avg} = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) = V_{RMS} I_{RMS} \cos(\angle V - \angle I)$.

$$= \frac{1}{2}|\hat{V}||\hat{I}| \cos(\angle V - \angle I) = \frac{1}{2}|\hat{I}|^2 \cdot \mathrm{Re}\{Z\} = \frac{1}{2}|\hat{V}|^2 \cdot \mathrm{Re}\{Y\}$$

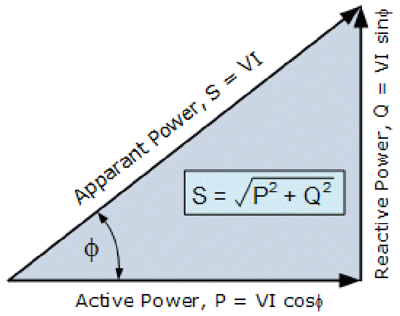
- <u>הספק ריאקטיבי</u>: $Q = \frac{1}{2}V_m I_m \sin(\angle V - \angle I)$
- <u>הספק כולל</u>:

$$S = \frac{1}{2}\hat{V} \cdot \hat{I}^* = P + jQ$$

$$S = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) + j\frac{1}{2}V_m I_m \sin(\angle V - \angle I)$$

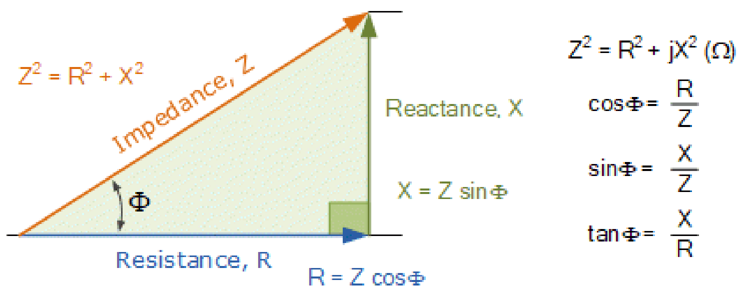
$$S = V_{RMS} I_{RMS} \cos(\angle V - \angle I) + jV_{RMS} I_{RMS} \sin(\angle V - \angle I)$$

- <u>משולש ההספקים</u>:



- <u>משולש העכבות</u>:

הערה: לעומת משולש ההספקים שאינו תלוי בחיבור פה יש להיזהר כיוון שיש לחבר את ההתנגדויות והעכבות לפי חיבורי המעגל



<u>התמרות לפלס</u>

תכונות

1. ליניאריות	$\mathcal{L}\{\alpha f_1+\beta f_2\}=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$
2. גזירות	$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^k(0)$ $\mathcal{L}\{f''\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
3. אינטגרציה	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}F(s)$
4. הזזה בזמן	$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\}=e^{-s\tau}F(s)$ עבור $f(t-\tau)$ הכולל הכפלה ב- $u(t-\tau)$
5. הזזה בתדר	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}=F(s+a)$
6. משפט הערך ההתחלתי	אם קיימים הגבולות : $\lim_{t\to 0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$
7. משפט הערך הסופי	אם קיימים הגבולות : $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$
8. מתיחה בזמן	$\mathcal{L}\{f(t/a)\}=aF(as)$
9. מתיחה\כווץ של s	$\mathcal{L}\{af(at)\}=F(s/a)$
10. גזירה בתדר	$\mathcal{L}\{-tf(t)\}=\frac{d}{ds}F(s)$
11. משפט הקונבולוציה	$\mathcal{L}\{g*h\}=G(s)\cdot H(s)$

טבלת התמרות לפלס

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs} ; all Re{s}
$u(t)$	$\frac{1}{s}$; Re{s} >0
$e^{at}\cdot u(t)$	$\frac{1}{s-a}$; Re{s} $>a$
$t^n\cdot u(t)$, $n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; Re{s} >0
$\sin at\cdot u(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$; Re{s} >0
$\cos at\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$; Re{s} >0
$e^{at}\sin bt\cdot u(t)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$; Re{s} $>a$
$e^{at}\cos bt\cdot u(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$; Re{s} $>a$
$t^n e^{at}\cdot u(t)$, $n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$; Re{s} $>a$
$u_c(t)=u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$; Re{s} >0
$e^{at}f(t)\cdot u(t)$	$F(s-a)$
$\sinh at\cdot u(t)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$; Re{s} $>\lvert a\rvert$
$\cosh at\cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$; Re{s} $>\lvert a\rvert$
$(-t)^n f(t)$, $n=1,2,3,\dots$	$F^n(s)$

פירוק לשברים חלקיים

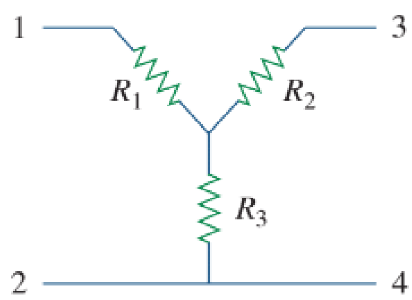
במידה והריבוי גדול מ-1:

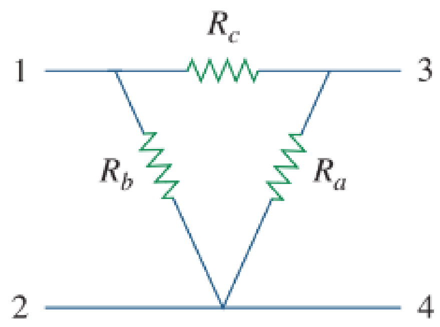
$$F(s)=\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}=\frac{P_m(s)}{(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_1)^{n_2}\dots(s-\lambda_1)^{n_r}}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{C_{ik}}{(s-\lambda_i)^k}$$

$$C_{ik}=\frac{1}{(n_i-k)!}\cdot\frac{d^{n_i-k}}{ds^{n_i-k}}\left[(s-\lambda_i)^{n_i}\cdot F(s)\right]_{s=\lambda_i}$$

מעגלי תמורה

מעגלי תמורה כוכב - משולש



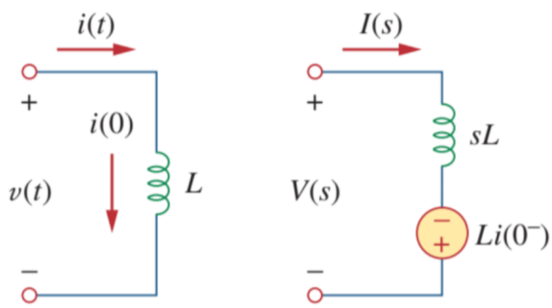


$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad ; \quad R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad ; \quad R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

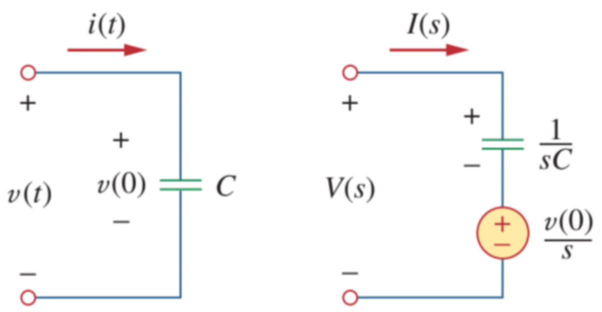
$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \quad ; \quad R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \quad ; \quad R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

מעגלי תמורה לתנאי התחלה בלפלס

מעגל תמורה של סליל:



מעגל תמורה של קבל:



הצגה במרחב המצב

הצגת מצב היא **כל** הצגה המקיימת:

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$$
$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$$
$$\underline{x}(0)$$

כאשר:

$$D_{k\times m}, C_{k\times n}, B_{n\times m}, A_{n\times n}, \underline{y}_{k\times 1}, \underline{u}_{m\times 1}, \underline{x}_{n\times 1}$$

הערה: במערכת SISO: $k = m = 1$.

פתרון בזמן:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t)\underline{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\cdot d\tau$$
$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + Du(t)$$

היכן ש: $\Phi(t) = e^{At}$ הינה מטריצת המעבר.

את מטריצת המעבר אפשר למצוא לפי $\Phi(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1}$, היכן ש-$T$ המטריצה שמביאה את A לצורה אלכסונית או לצורת ז'ורדן - $\Lambda = T^{-1}AT$.

צורת בלוק ז'ורדן: $J_q = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

מתקיים:

עבור $q = 2$: $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$; עבור $q = 3$: $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

מציאת וקטור עצמי מוכלל:

עבור ע"ע λ מריבוי q, במטריצה T יופיעו q עמודות לפי: $AV = \lambda V$

$$\underline{t_1} = V \quad ; \quad (A-\lambda I)\underline{t_{K+1}} = \underline{t_K} \quad, K = 1,..q-1$$

פתרון על ידי לפלס:

$$\underline{X}(s) = [sI - A]^{-1}\underline{x}(0) + [sI-A]^{-1}BU(s)$$
$$\underline{Y}(s) = C\underline{X}(s) + DU(s)$$

<u>פונקציית התמסורת</u>: $G(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$

<u>הצגות מיוחדות</u>:

1. עבור מערכת $SISO$, <u>הצגת מצב אלכסונית</u> (אם קימת) אפשר למצוא מתוך פונקציית התמסורת ע"י פרוק לשברים חלקיים. למשל:

$$G(s) = \frac{r_1}{s-\lambda_1} + \frac{r_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{r_n}{s-\lambda_n} + d$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

$$c = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_n], \quad d \qquad ; \beta_i \gamma_i = r_i$$

2. עבור מערכת $SISO$, הצגה <u>במשתני פאזה</u>: עבור מד"ר עם ת.ה:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, u^{(k)}(t)$$

$$y^{(n-1)}(0), \dots, y(0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}, d = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(0) \\ y^{(1)}(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$$

אם באגף ימין במד"ר נוסף איבר $b_n u^{(n)}(t)$ אז יש לתקן ל- $d = b_n$ וגם יש לתקן את C:

$$C \rightarrow C_{new} = [b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}] + b_n[-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1}]$$

3. עבור מערכת $SISO$, טרנספורמציית הדמיון מקיימת עבור $\underline{x}(t) = T\underline{z}(t)$:

$$\dot{\underline{z}}(t) = (T^{-1}AT) \cdot \underline{z}(t) + (T^{-1}B) \cdot u(t)$$
$$y(t) = CT\underline{z}(t) + Du(t)$$
$$\underline{z}(0) = T^{-1}\underline{x}(0)$$

עקומות בודה

- כללי:
  - $\mathbf{log_{10} 2 = 0.3 \quad ; \quad log_{10} 3 = 0.48}$
  - מרחק בתדר: פי 10 דקדה ; פי 2 אוקטבה
- מגניטודה בדציבלס: $\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(|G(j\omega)|\right)$

	הביטוי	הפרש בין ערך אמיתי ואסימפטוטי בתדר ברך	תרומה לשיפוע בעקומה
אפס פשוט	$1+\frac{s}{a}$	$+3[dB]$	$20\left[\frac{dB}{dec}\right]$
קוטב פשוט	$\frac{1}{1+\frac{s}{a}}$	$-3[dB]$	$-20\left[\frac{dB}{dec}\right]$
זוג אפסים צמודים	$1+2\xi\left(\frac{s}{a}\right)+\left(\frac{s}{a}\right)^2 ; \|\xi\| < 1$	$-20\, log\left(\frac{1}{2\|\xi\|}\right)$	$40\left[\frac{dB}{dec}\right]$
זוג קטבים צמודים	$\frac{1}{1+2\xi\left(\frac{s}{a}\right)+\left(\frac{s}{a}\right)^2} ; \|\xi\| < 1$	$20\, log\left(\frac{1}{2\|\xi\|}\right)$	$-40\left[\frac{dB}{dec}\right]$

השיפוע בגרף הגבר לוגריתמי: $m = \frac{|H(j\omega_1)|_{dB} - |H(j\omega_2)|_{dB}}{\log_{10}\omega_1 - \log_{10}\omega_2}$

- פאזה: $\phi(j\omega) = \angle G(j\omega)$

	הביטוי $(a > 0)$	תרומה ב $\omega \to 0$	תרומה ב $\omega \to \infty$
אפס ימני	$1-\frac{s}{a}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
אפס שמאלי	$1+\frac{s}{a}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
קוטב ימני	$\left(1-\frac{s}{a}\right)^{-1}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
קוטב שמאלי	$\left(1+\frac{s}{a}\right)^{-1}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

אסימפטוטית, מציירים את שינוי הפאזה כקו ליניארי בין $\left(\frac{\omega_0}{5}, 5\omega_0\right)$.

השיפוע בגרף הלוגריתמי יהיה: $m = \frac{\Delta\phi}{\log 25}\left[\frac{rad}{dec}\right]$

נוסחאות מתמטיות

אלגברה ליניארית

- היפוך מטריצות:

2x2:	3x3:
$T=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $T^{-1}=\frac{adj(T)}{\det(T)}=\frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad-bc}$	$T=\begin{bmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{bmatrix}$ $T^{-1}=\frac{adj(T)}{\det(T)}=\frac{\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b1 & c1 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b1 & c1 \\ b2 & c2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a3 & b3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}}{\det(T)}$

- עבור שלוש מטריצות ריבועיות הפיכות A,B,C מתקיים $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- עבור מטריצת בלוקים:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix};A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{-1} \end{bmatrix}$$

- כלל קרמר: פתרונות המערכת $A\cdot \underline{x}=\underline{b}$ מקיימות: $x_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

כאשר: A_i היא המטריצה A שהחליפו בה את העמודה ה-i בוקטור $\underline{b}$.

טריגונומטריה

מכפלה לסכום
$\cos\theta\cos\varphi = \dfrac{\cos(\theta-\varphi)+\cos(\theta+\varphi)}{2}$
$\sin\theta\sin\varphi = \dfrac{\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)}{2}$
$\sin\theta\cos\varphi = \dfrac{\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)}{2}$

סכום למכפלה
$\sin\theta+\sin\varphi = 2\sin\left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)$
$\sin\theta-\sin\varphi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)$
$\cos\theta-\cos\varphi = -2\sin\left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)$
$\cos\theta+\cos\varphi = 2\cos\left(\dfrac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)$

סכום והפרש זוויות

$\sin(\theta\pm\varphi) = \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi$
$\cos(\theta\pm\varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi$